

## ETAPA DE ELABORARE 1

### RAPORT PRIVIND ACTIVITATEA 1.1 / part 1.1.2

**“Evaluarea Stadiului Tehnologic și Științific privind Algoritmi și Tehnici de Colectare de Pre-Clasificare și Grupare a Datelor pentru Monitorizarea și Predicția stării de oboseală mentală”**

- ☐ Raport științific în extenso
- ☐ Proces verbal de avizare internă

# RAPORTUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC ÎN EXTENSO

## CUPRINS

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Prefață .....                                                                            | 4  |
| Capitolul 1 Electroencefalograma (EEG)                                                   |    |
| 1.1 Introducere .....                                                                    | 5  |
| 1.2 Analiza electroencefalogramelor somnului .....                                       | 5  |
| 1.2.1 Macrostructura electroencefalogramelor .....                                       | 5  |
| 1.2.2 Microstructura electroencefalogramelor .....                                       | 11 |
| 1.3 Concluzii .....                                                                      | 13 |
| Capitolul 2 Analizele Matematice ale EEG                                                 |    |
| 2.1 Analiza numerică a EEG .....                                                         | 13 |
| 2.2 Spațiul de fază timp-frecvență .....                                                 | 15 |
| 2.3 Transformata Fourier ferestruită .....                                               | 16 |
| 2.4 Analiza oscilațiilor amortizate .....                                                | 17 |
| 2.5 Rețele neuronale artificiale .....                                                   | 22 |
| 2.6 Criteriul Adaptării (Matching Pursuit) .....                                         | 26 |
| Capitolul 3 Simulări și observații practice                                              |    |
| 3.1 Transformata Fourier ferestruită .....                                               | 32 |
| 3.2 Transformata discrete ortogonală cu unde amortizate .....                            | 35 |
| 3.2.1 Rezoluția în frecvență .....                                                       | 35 |
| 3.2.2 Sensibilitatea reprezentării față de un decalaj în timp al ferestrei de analiză .. | 37 |
| 3.2.3 Condiții la limită .....                                                           | 40 |
| 3.2.4 Calcularea produselor de bandă limitată .....                                      | 40 |
| 3.3 Pachete cu unde amortizate .....                                                     | 42 |
| 3.4 Rețele cu unde amortizate .....                                                      | 43 |
| 3.5 Criteriul Adaptării utilizând funcții Gabor .....                                    | 46 |
| 3.5.1 Amplitudinea funcției Gabor discrete .....                                         | 47 |
| 3.5.2 Numărul formelor de undă din dezvoltare .....                                      | 48 |
| 3.5.3 Procedee de realizare practică .....                                               | 50 |

## Capitolul 4 Rezultate și Discuții

|                                                                                                     |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>4.1 Studiul potențialelor evocare .....</b>                                                      | <b>58</b>     |
| <b>4.1.1 Investigarea influenței leziunilor cerebrale .....</b>                                     | <b>58</b>     |
| <b>4.2 Detectarea artefactelor EEG utilizând o rețea neuronală artificială .....</b>                | <b>61</b>     |
| <b>4.2.1 Rețelele testate .....</b>                                                                 | <b>62</b>     |
| <b>4.2.2 Analiza rezultatelor .....</b>                                                             | <b>64</b>     |
| <b>4.2.3 Concluzii .....</b>                                                                        | <b>66</b>     |
| <b>4.3 Detectarea vârfurilor din timpul somnului și analiza utilizând Criteriul Adaptării .....</b> | <b>66</b>     |
| <b>4.3.1 Date experimentale .....</b>                                                               | <b>67</b>     |
| <b>4.3.2 Alegerea vârfurilor din atomii timp-frecvență .....</b>                                    | <b>68</b>     |
| <br><b>Capitolul 5 Concluzii .....</b>                                                              | <br><b>74</b> |
| <br><b>Bibliografie .....</b>                                                                       | <br><b>75</b> |

### Colectiv de realizare :

#### Coordonator

Conf.Univ.Dr. ILIESCU DAN MARCEL  
Lector Univ.Dr. BOBE ALEXANDRU  
Asist.Univ.Dr. IONESCU ANA MARIA  
Conf.Univ.Dr. HANGAN LAURENȚIU-TONY  
Asist.Univ.Dr. TOBĂ RUXANDRA

- Director proiect  
- Membru-cercetator  
- Membru-cercetator  
- Membru-cercetator  
- Membru-cercetator

#### Partener activitate

Dr.dipl.ing. DUMITRESCU CATALIN-MARIAN  
ing. LAZAR LAVINIA MARIA  
GHENEA IRINEL  
TOPITA ANTON-CATALIN  
DAMIAN MIHAIL-IULIAN

- Responsabil partener  
- Membru-cercetator  
- Membru-cercetator  
- Membru-cercetator  
- Membru-cercetator

## PREFAȚĂ

*Sunt obosit, putem lasa pe maine?” – de cate ori am spus-o celor dragi sau am auzit-o de la ei? De cele mai multe ori, maine se transforma in saptamana viitoare sau luna viitoare...iar oboseala ne fura viata sociala, visele, aspiratiile tinandu-ne pe linia de plutire. Ce este oboseala si de ce somnul nu-i intotdeauna suficient pentru a scapa de ea, afla in randurile de mai jos.*

Oboseala este o stare fizica si mentala, caracterizata prin lipsa de energie si motivatie. Acesta este diferita de somnolenta si este un raspuns normal al organismului la activitatile pe care le desfasuram zilnic. Atunci cand oboseala persista pentru o perioada mai mare de timp incep sa apara mai multe simptome si tulburari care afecteaza intregul organism.

Principalele simptome ale oboselii sunt:

**La nivel neurocognitiv** - incapacitate de concentrare, tulburari de memorie, randament intelectual scazut, dureri de cap, irascibilitate, senzatii de ameteala, tulburari de somn.

Oboseala poate fi determinata de suprasolicitarea creierului in activitatile de zi cu zi, de stres, dar si de o multitudine de afectiuni.

Din punct de vedere clinic există o **simptomatologie cronică de tip anxios și depresiv**. Totuși, bolile din aceste două categorii includ și multe alte manifestări iar simptomele care sunt similare cu cele ale neurasteniei sunt de regulă mai severe.

Tulburările depresive și cele anxioase debutează și evoluează după alte tipare, au un alt răspuns la tratamentul psihotrop.

**Creierul se află într-o stare prelungită de suprastimulare** și, din această cauză, se ajunge la neliniște, tensiune psihică și fizică, o dispoziție cronică de iritabilitate, labilitate emoțională, oboseală în special mentală, letargie și extenuare (epuizare percepută chiar la eforturi minore).

Ceea ce demoralizează persoanele afectate este că **odihna (activă sau pasivă) nu îi ajută decât foarte puțin sau chiar deloc**. Se caută repausul, odihna, “evitarea stresului”, însă pacienții constată că **starea lor de activare este atât de crescută, încât nu reușesc să se mai relaxeze**.

Stresul prelungit duce la apariția de simptome în mai toate regiunile corpului, motiv pentru care pacienții solicită un volum uriaș de servicii, în special din domeniul medicinei interne. Iată câteva dintre **simptomele care pot ascunde o stare de oboseală cronică**:

- insomnie, oboseala accentuată pe timpul zilei;
- dificultăți de concentrare, probleme de memorie;

- scăderea randamentului gândirii.

## Capitolul 1

### CONCEPTE FUNDAMENTALE PRIVIND ANALIZA SEMNALELOR ELECTROENCEFALOGRAFICE

#### 1.1 Introducere

Studiul fenomenelor tranzitorii ale electroencefalogrammei (EEG) a debutat în anii '30 cu prima descriere a ciclurilor (stadiilor) de somn. Obiectul acestor lucrări era, atunci, de a stabili o primă clasificare, în stadii, a activității cerebrale umane în timpul somnului. În prezent, eforturile se concentrează mai ales asupra analizei fenomenelor tranzitorii, unul dintre principalele obiective fiind înțelegerea mecanismelor generatoare ale somnului și rolul fiziologic al activității electrice a creierului. În acest domeniu de cercetare, utilizarea mijloacelor automatizate de prelucrare a informației rămâne un factor important de progres datorită volumului mare de date de analizat [Gai73], [Ray86], [Rey87], [Sha93], [Cim97].

Într-adevăr, expertiza semnalelor somnului, foarte costisitoare și solicitantă atunci când trebuie să fie aplicată în mod vizual, nu poate fi în mod rezonabil examinată la scară mare, decât dacă este automatizată.

#### 1.2 Analiza electroencefalogrammei somnului

##### 1.2.1 Macrostructura electroencefalogrammei

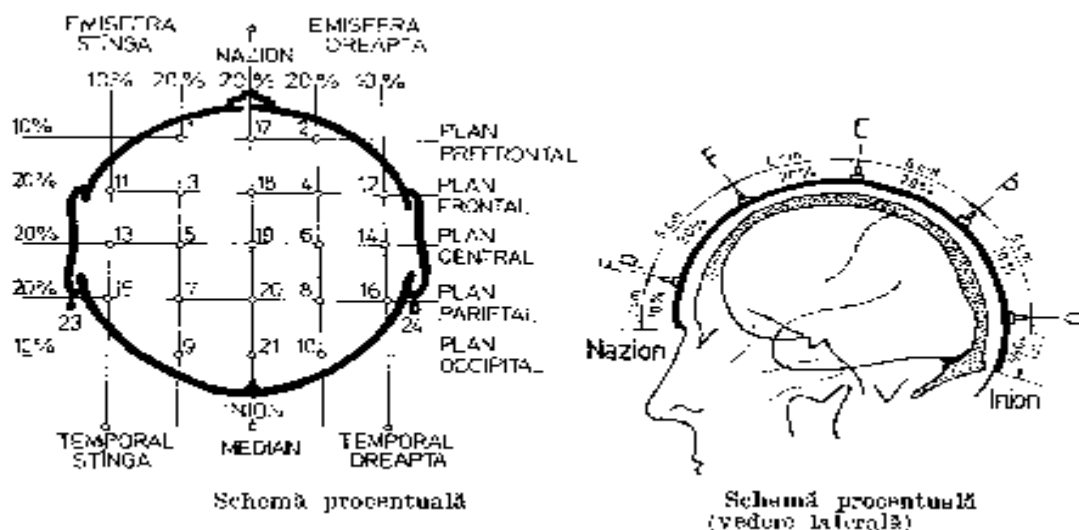
Explorarea fiziologică a somnului implică studiul mai multor semnale, precum electroencefalograma (EEG), electrooculograma (EOG) sau chiar electromiografia (EMG).

Electroencefalograma reprezintă activitatea semnalelor bioelectrice și determină activitatea electrică a creierului. Oscilațiile creierului se numesc *unde cerebrale*. Acestea au anumite caracteristici

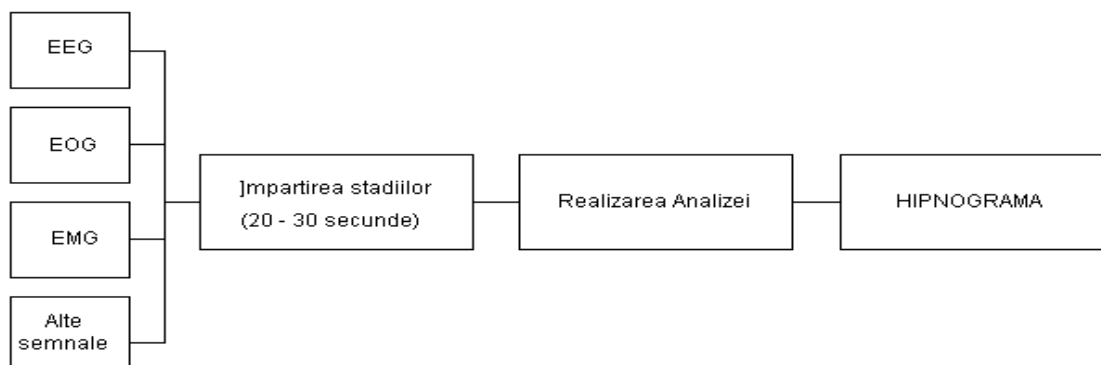
printre care: amplitudinea cuprinsă între 10-500  $\mu\text{V}$  și frecvența cuprinsă între 0.5-40 Hz. Pentru măsurarea undelor cerebrale se utilizează sistemul internațional standardizat numit „*International Federation 10-20 system*”. Acesta este prezentat în *figura 1.1*.

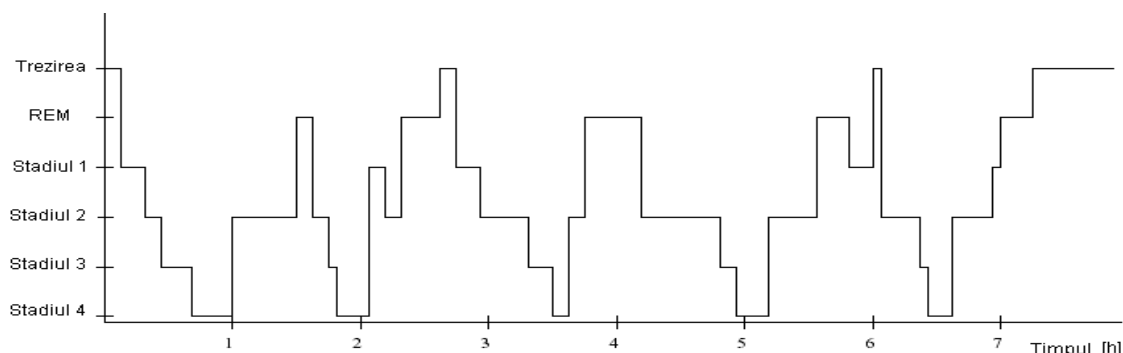
Rezultatul acestei analize complexe este vizualizat cu ajutorul *hipnogramei*, pe care se disting stadiile somnului realizate prin secvențe succesive de 30 de secunde de somn.

Procedeul de realizare a hipnogramei este arătat în *figura 1.2*.



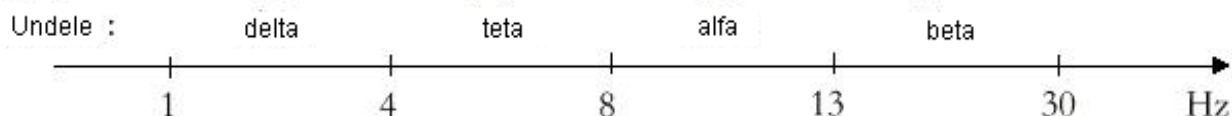
**Figura 1.1.** Sistemul internațional 10 – 20.





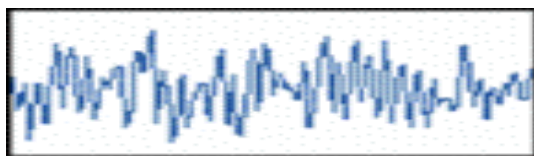
**Figura 1.2.** Procedeeul de realizare a hipnogramei și reprezentarea grafică a acesteia.

Aceste stadii sunt definite prin natura semnalelor întâlnite în EEG, printre care se numără creșterile undelor delta, teta, alfa sau beta, care se identifică prin domeniile lor de frecvență [Cim97].



Tipurile principale de unde sunt:

**Alfa:** Cercetările au indicat că la o persoană trează, prezența undelor alfa indică o relaxare a acesteia. Undele alfa sunt cuprinse în intervalul 8 - 12 Hz, au o formă aproape sinusoidală și amplitudinea cuprinsă între 20 și 40  $\mu V$ .



**Figura 1.3:** Reprezentarea undelor alfa

**Beta:** Când o persoană răspunde la o stimulare externă, undele alfa sunt înlocuite de undele beta. Acestea sunt cuprinse în intervalul 14 - 25 Hz și au o amplitudine cuprinsă între 5 și 20  $\mu V$ .



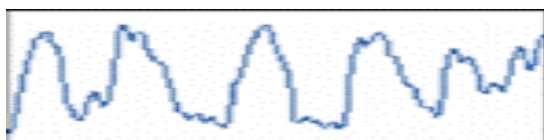
**Figura 1.4:** Reprezentarea undelor beta

*Theta:* Undele teta sunt în intervalul 4 - 8 Hz, cu o amplitudinea de 15 – 25  $\mu$ V și apar în mod normal în timpul somnului, dar sunt asociate cu stările de visare, creativitate și posibilități extinse de învățare.



**Figura 1.5:** Reprezentarea undelor theta

*Delta:* Undele delta sunt cuprinse în intervalul 0,5 - 4 Hz, au o amplitudine mai mare de 75  $\mu$ V și apar în timpul somnului profund.



**Figura 1.6:** Reprezentarea undelor delta

Insistând asupra acestei clasificări, cele cinci stadii ale somnului, reprezentate în *figura 1.7*, sunt definite astfel:

- **Stadiul 1:** corespunde momentelor de declin al stării de veghe, de tranziție între starea de veghe relaxată și starea de somnolență. Undele beta cresc în amplitudine (beta subvigil), procentul de unde alfa în lobul posterior (parietal-occipital) scade sub 50 %, au amplitudine mică și durată de aproximativ 1 – 7 minute, fiind treptat înlocuite de unde teta (ritm teta).

- **Stadiul 2:** indică starea de somn ușor. Apar undele teta și undele secundare, tranzitorii, de tipul fusurilor de somn (sleep spindles) cu frecvența de 14 Hz, amplitudine de 40-50  $\mu$ V și *complexul K* cu frecvența de 33 Hz, amplitudine 100  $\mu$ V. La o persoană sănătoasă acestea trebuie să fie prezente

simultan atât în emisfera stângă cât și în cea dreaptă. De asemenea amplitudinea undelor crește semnificativ în ariile cerebrale centrale.

- **Stadiul 3:** indică starea de somn lent (stabil), apar undele lente de mare amplitudine pe 20-50% din eșantioane, numite unde delta (ritm delta -  $75\mu\text{V}$ ), undele teta devin neregulate. În acest stadiu, mai persistă încă undele tranzitorii de tipul fusuri de somn și complex K.

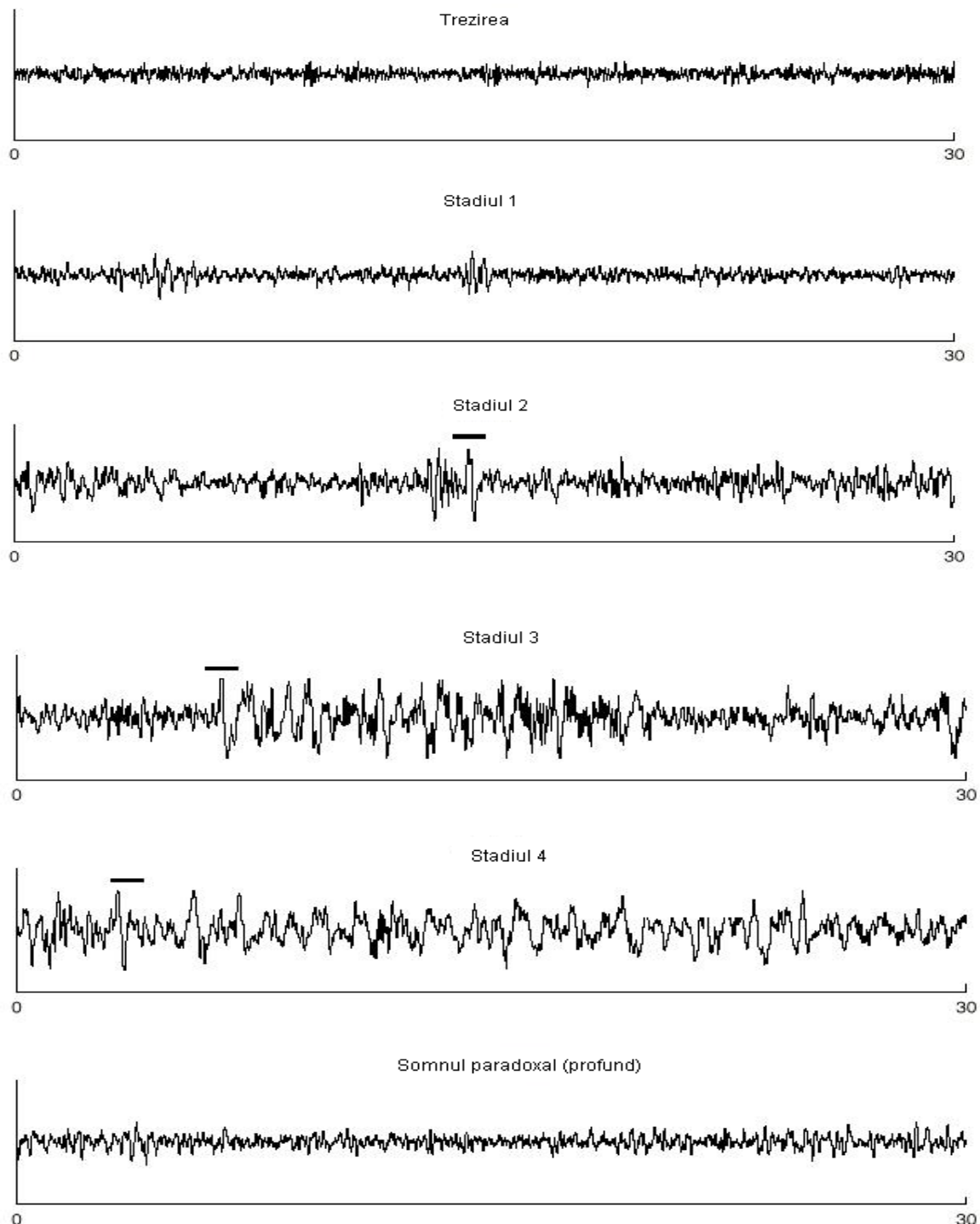
- **Stadiul 4:** indică starea de somn rapid (paradoxal), apar creșteri ale undelor delta pe mai mult de 50% din eșantioane (ritm delta -  $75\mu\text{V}$ ), undele teta apar regulat și dispar undele secundare.

- **Somnul paradoxal:** sau faza REM (*Rapid Eye Movement*) dă impresia unui somn superficial, deși profunzimea somnului este mai adâncă decât în celelalte etape de somn (relaxare musculară și mișcări oculare rapide). Este o etapă de somn cu vise, cu secreții hormonale de creștere, având un rol predominant în funcția de restaurare.

În mod convențional, „*somnul lent* ” sau faza NREM (Non Rapid Eye Movement) grupează stadiile 1, 2 și 3, în timp ce „*somnul rapid - paradoxal* ” sau faza REM (*Rapid Eye Movement*) se distinge în stadiul 4.

Dacă această clasificare furnizează informații esențiale pentru identificarea unor anumite anomalii ale somnului, ea conduce, totuși, la un diagnostic incomplet. Într-adevăr, această clasificare nu ține cont în mod explicit, de exemplu, de frecvența aparițiilor fenomenelor tranzitorii, importante pentru evidențierea anumitor patologii.

Obiectivul următoarei secțiuni este descrierea undelor secundare, numite tranzitorii, printre care se numără *complexul K*.

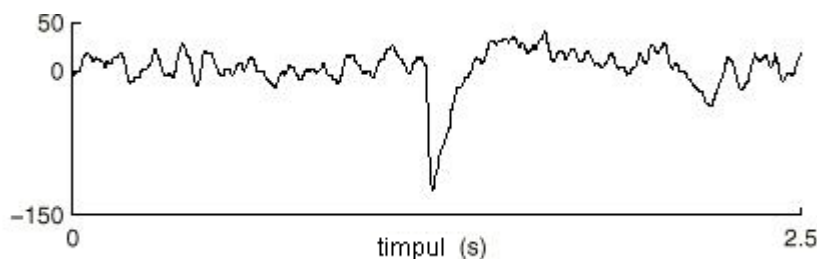


**Figura 1.7.** Ilustrarea celor cinci stadii de somn, cu ajutorul secvențelor de 30 de secunde ale EEG. Segmentele orizontale care figurează pe secvențele stadiilor 2, 3, și 4 indică prezența complexului K.

### 1.2.2 Microstructura electroencefalogramei

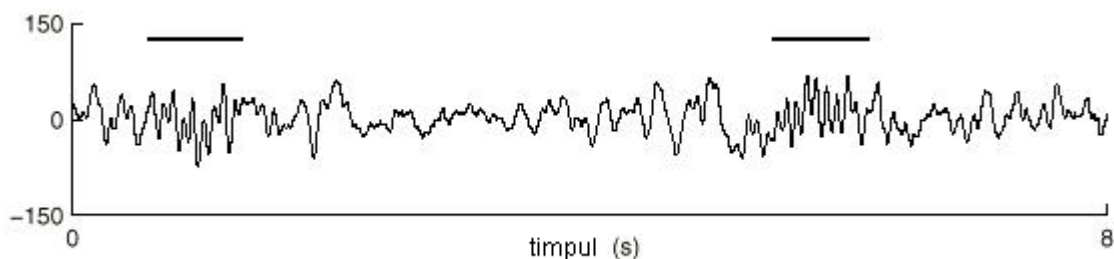
În acest subcapitol se descriu în mod succint cele mai cunoscute evenimente fazice ale electroencefalogramei somnului, fără a se insista asupra rolului lor fiziologic care este încă dezbătut.

- *Punctele Vertex* [Cim97]: După cum arată *figura 1.8*, în stadiul 1 apar impulsuri negative, în timpul fazei de adormire, a căror amplitudine crește cu aprofundarea somnului (pe măsură ce somnul devine mai profund). Aceste fenomene fazice pot să apară ca răspuns la anumiți stimuli externi și se manifestă în mod spontan.



**Figura 1.8.** Exemple de puncte Vertex

- *Fusul de somn* [Cim97]: Aceste evenimente constituie unul dintre criteriile de definiție ale stadiului 2. Ele apar pe EEG sub forma unor semnale tranzitorii cvasi-sinusoidale, de frecvență cuprinsă între 12-16 Hz și de durată variabilă între 0,5 și 1 secunde la adulți. Un exemplu este prezentat în *figura 1.9*. Se asociază ușor unui mecanism neurologic care protejează organismul de perturbațiile externe ale somnului, chiar dacă această funcție nu are întotdeauna unanimitate.

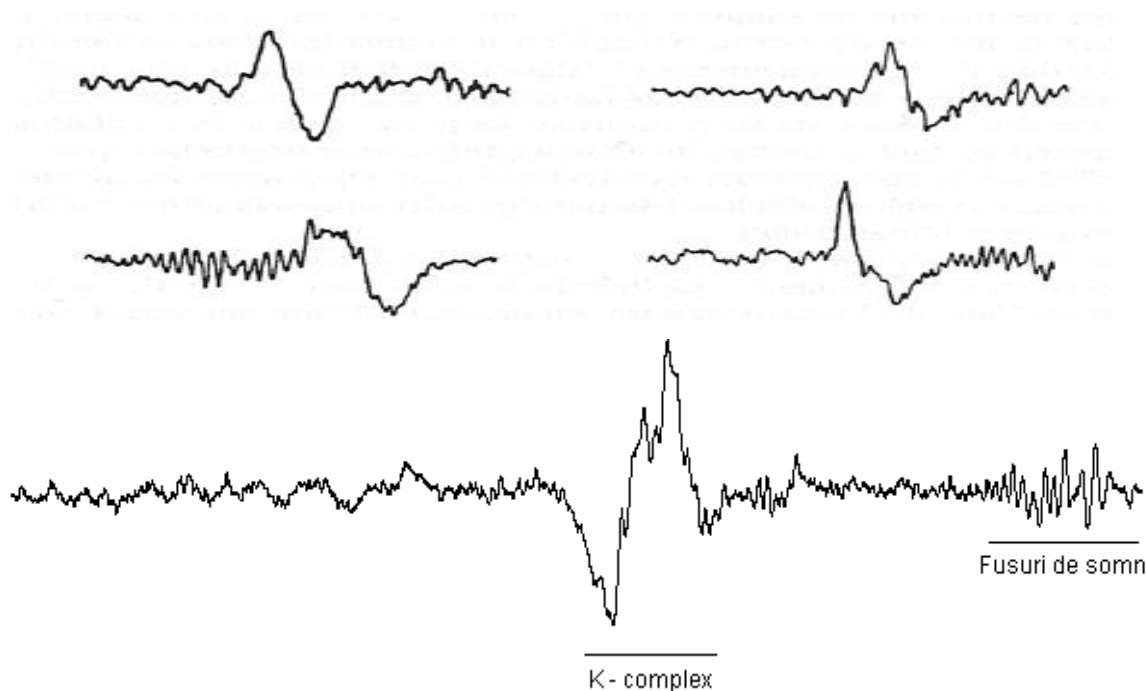


**Figura 1.9.** Exemple de fusuri de somn.

• **Complexul K** [Cim97]: Complexul K constituie, împreună cu fuserile de somn, unul dintre principalii „marcatori” ai începutului somnului, din moment ce apare de la stadiul 2. El este definit de o undă cu ambele polarități, având amplitudinea minimă  $100 \mu V_{w}$ , durată între 0.5 – 1 secunde, precedată și urmată de activitatea de mică amplitudine, de cel mult  $50 \mu V_{w}$ , pe o durată de cel puțin 2 secunde. Complexul K este prezentat în *figura 1.10*. Complexul K poate apărea atât spontan (neevocat), cât și sub influența unor stimuli externi. Complexul K prezintă un suport de frecvență cuprins între 1-4 Hz și se distinge prin amplitudinea electroencefalogramei sale de fond a stadiului 2, cum arată *figura 1.7*. În același timp, pe motivul unei asemănări pronunțate cu alte fenomene nestaționare observate în somnul profund, de exemplu creșterile undelor delta prezentate în *figurile 1.6 și 1.7*, este foarte dificil să se izoleze în stadiile 3 și 4. *Importanța detectării complexului K este datorată semnificației pe care o are pentru prognostic și diagnostic.*

Acest lucru justifică interesul pentru metodele statistice, în vederea încercării de a obține un răspuns satisfăcător la aceste probleme de detecție.

*Imaginile de mai jos exemplifică câteva forme de undă ale complexului K.*



**Figura 1.10.** Forme de undă ale complexului K.

### 1.3 Concluzii

Obiectivul acestui capitol este de a prezenta macrostructura și microstructura electroencefalogrammei. Eforturile se concentrează mai ales asupra analizei fenomenelor tranzitorii, unul dintre principalele obiective fiind înțelegerea mecanismelor generatoare ale somnului și rolul fiziologic al activității electrice a creierului. În finalul capitolului se descriu parametrii undelor tranzitorii, printre care se numără *fusurile de somn* și *complexul K*.

## Capitolul 2

### Analizele Matematice ale electroencefalogrammei (EEG)

#### 2.1. Analiza numerică a EEG

Electroencefalograma (EEG) este o înregistrare electrică a activității creierului.

În actualul stadiu de cunoaștere există două constatări importante în ceea ce privește analiza EEG:

**Constatarea 1** *Principial, noi nu avem o concepție despre cum funcționează creierul ca o mașină psihoelectrochimică*

**Constatarea 2** *EEG este folosită de mulți ani ca un parametru important în practica clinică. Aceste cunoștințe „clasice” despre EEG se referă la natura fenomenologică și constau, cel mai adesea, în analiza vizuală.*

În urmă cu 23 de secole, Aristotel presupunea că creierul servește pentru a răci sângele. Astăzi, după un secol de studii experimentale asupra creierului și după 75 de ani de la prima înregistrare EEG, știm cum funcționează un singur neuron și putem înregistra semnale care să arate activitatea globală a creierului cu mare precizie. Totuși, încă nu știm cum procesele separate din creier sunt organizate într-o funcționare coerentă.

Cel mai adesea, cunoștințele noastre sunt fenomenologice. Analiza vizuală a înregistrărilor brute este cea mai răspândită și sigură metodă de analiză clinică a EEG, în special dacă sunt importante tranzițiile sau schimbările în timp ale proprietăților semnalului.

În unele cazuri, când se preferă informații despre proprietățile medii ale perioadei analizate, atunci se folosește estimarea puterii spectrale.

Arta analizării vizuale a EEG are trei limitări majore : sensibilitatea, repetabilitatea și prețul de cost. O parte din acestea pot fi depășite prin analize numerice care aduc îmbunătățiri importante, atât în îngrijirea sănătății cât și în cercetarea neurofiziologică de bază.

Scăderea continuă a prețului tehnicii de calcul împreună cu dezvoltarea rapidă a matematicii deschide posibilități noi în acest câmp. Diferite tehnici de procesare a semnalului sunt aplicate seriilor în timp ale EEG. O alegere corespunzătoare a conceptelor matematice pentru o aplicație particulară constituie o dificultate importantă.

Este nevoie de criterii generale care să poată fi aplicate în astfel de situații. Ele pot fi deduse din metodologia generală de cercetare fizică (vezi Bialkowski 1985) adaptând-o la situația particulară din analiza EEG.

### Criteriu de verificare

În general, acest criteriu este înțeles drept o consistență a rezultatelor, dată prin aplicarea unei noi metode sau teorii față de cunoștințele anterioare. În cercetarea EEG, cea mai puternică referință pentru judecarea unor rezultate noi este, de regulă, analiza vizuală. O condiție necesară pentru verificarea acestui criteriu este posibilitatea de a verifica această consistență, care nu este întotdeauna directă.

### Criteriu de predicție

O nouă metodă trebuie să aducă, desigur, ceva îmbunătățiri – referitoare la lărgirea posibilităților de cercetare. O nouă unealtă ne poate permite să prezicem noi fenomene sau să dăm noi explicații. Totuși, acest criteriu nu este o condiție obligatorie pentru aplicarea cu succes a unei noi metode în câmpul analizei EEG. În unele cazuri, o metodă automată care să respecte doar criteriul

verificării poate aduce o îmbunătățire importantă prin posibilitatea de a procesa precis o cantitate mare de date.

Primul succes în analizarea automată a EEG a fost introducerea algoritmului FFT (Fast Fourier Transform – transformata Fourier rapidă) în 1965, care a permis folosirea pe scară largă a transformatei Fourier (FT). Transformata Fourier îndeplinea criteriul predicției și realiza o nouă categorie de informații – distribuția spectrală a energiei semnalului. Cu toate acestea, FT poate duce la erori statistice și este influențată sever ca urmare a presupunerii neadevărate că semnalul este ori infinit ori periodic în afara ferestrei de măsurare.

Totuși, până acum, FFT este principala unealtă de procesare de semnal folosită pentru analizarea semnalelor biomedicale. Metodele parametrice, cum ar fi modelul autoregresiv (AR), nu prezintă efectul de „ferestruire” și dau estimări cu proprietăți statistice mai bune, deoarece nu se mai fac presupuneri asupra semnalului în afara ferestrei de măsură. Totuși, analog ca în cazul FT, este necesar ca semnalul să fie staționar.

Metodele spectrale, cum ar fi transformata Fourier și modelele autoregresive (AR), au limitările lor naturale. Ele oferă caracteristici globale ale întregului segment analizat, iar structurile de semnal cu durată mai scurtă decât fereastra de măsurare nu pot fi identificate. În concordanță cu cunoștințele actuale, informația procesată de creier este codificată de schimbările dinamice ale activității electrice în timp, frecvență și spațiu. O descriere completă ale acestor fenomene ar necesita o rezoluție timp-frecvență foarte bună, care nu poate fi obținută cu FFT sau AR. Totuși, aceste observații nu vor să sugereze că aceste metode n-ar mai fi utile. Într-adevăr, există destule cazuri când sunt necesare caracteristicile globale ale întregului segment analizat. De asemenea, în unele cazuri, analizele timp-frecvență nu pot furniza tipul de informație dată de modelul AR multicanal, de exemplu, direcția fluxului de informații între electrozi (Kaminski și Blinowska).

## 2.2. Spațiul de fază timp-frecvență

Termenul *spațiu de fază*, binecunoscut din fizică, are înțelesul lui precis și în aplicațiile de procesare de semnal (Daubechies 1990). În zona analizelor seriilor dinamice există un spațiu bidimensional (plan) cu timpul pe axa orizontală și frecvența pe axa verticală, în care se reprezintă

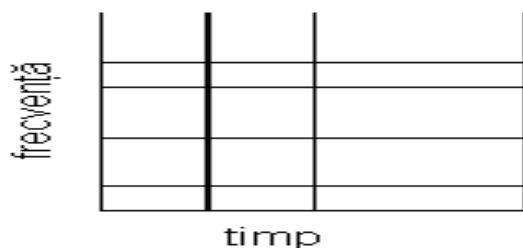
densitatea de energie a semnalului. Deoarece în practică se lucrează cu intervale finite de semnale nestaționare, reprezentarea energiei acestor semnale în acest spațiu este aproximativă și subiect de erori statistice. Densitatea de energie este aproximată printr-un set discret de puncte din spațiul de fază timp-frecvență. Ca metode timp-frecvență noi înțelegem concepte care să furnizeze informații despre localizarea în timp și în frecvență a fenomenelor prezente în semnalul analizat, sau densitatea de energie a semnalului în spațiul de fază timp-frecvență.

## Metode de analiză

### 2.3. Transformata Fourier ferestruită

Transformata Fourier ferestruită (sau transformata Fourier rapidă) constă în înmulțirea semnalului  $f(t)$  cu funcția fereastră  $g$ , și calcularea coeficienților Fourier ai produsului  $gf$ . Funcția fereastră este centrată în jurul valorii 0 și numai într-un interval finit este centrată în jurul altei valori. Această procedură este repetată cu versiuni translatate ale lui  $g : g(t+t_0), g(t+2t_0)$ , etc. Astfel, energia semnalului este reprezentată printr-o rețea discretă de puncte în spațiul de fază timp-frecvență :

$$c_{mn}(f) = \int e^{im\omega t} g(t-nt_0) f(t) dt \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$



**Figura 1.** Împărțirea simbolică a spațiului timp-frecvență pentru transformata Fourier ferestruită

Coeficienții  $c_{m,n}$  dau o indicație asupra conținutului energetic al semnalului  $f$  în apropierea intervalelor de timp  $nt_0$  și de frecvență  $m\omega_0$ . Îi putem interpreta drept produse ale semnalului  $f$  cu

„stările coerente”  $g_{mn}$ , generate de o singură funcție fereastră  $g$  prin translații și modulații, sau prin translații în timp și frecvență:

$$g_{mn}(t) = e^{im\omega t} g(t - nt_0) \quad (2.2)$$

Totuși, s-a demonstrat (Daubechies 1990) că nici o alegerea rezonabilă (adică bine concentrată în timp și frecvență) a funcției fereastră  $g$  nu poate duce la o construcție pe baza formulei de mai sus.

De aceea, o astfel de reprezentare va conduce întotdeauna la o redundanță intrinsecă

## 2.4. Analiza oscilațiilor amortizate

Funcția  $\psi$  este o undă amortizată admisibilă dacă ea satisface formula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.3)$$

sau, echivalent, dacă transformata ei Fourier  $\psi(w)$  satisface condiția  $\psi(0) = 0$ . Pentru a îndeplini această condiție ea trebuie să oscileze și, de aici, numele „undă amortizată”.

Transformata cu unde amortizate descrie semnalele în termeni de coeficienți, reprezentând conținutul lor energetic în regiunea timp-frecvență specifică. Această reprezentare este construită cu ajutorul descompunerii semnalului peste un set de funcții generate prin translatarea și unei singure funcții cu unde amortizate  $\psi$ :

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2.4)$$

Numele (*ondelettes*) și cadrul general au fost introduse de Yves Meyer și Jean Morlet în 1984. Deoarece, de atunci, se observă o expansiune victorioasă a aplicațiilor bazate pe tehnicile cu unde amortizate, de la ecuații diferențiale și fractali până la geofizică și analiza și comprimarea imaginii. Teoria undelor amortizate creează un cadru comun pentru probleme din diferite câmpuri de activitate. Totuși, introducerea undelor amortizate nu poate fi tratată ca o descoperire complet nouă. Aproximări

similare pot fi găsite în mai multe lucrări înainte de 1984 – să amintim numai teoria Calderon-Zygmund (Calderon și Zygmund în 1954).

Totuși, cel mai important pas, cel puțin din punct de vedere al aplicațiilor practice bazate pe analiza seriilor dinamice, a fost găsit în anii 80 și anume că formula (2.4) poate genera o bază ortonormală în  $L^2(R)$ , unde  $\psi$  este o funcție bine localizată în domeniile timp și frecvență. Vom discuta despre asemenea baze în cadrul descompunerii multirezoluție.

Descompunerea multirezoluție poate fi văzută ca o aproximare recursivă a unui semnal la rezoluții care se schimbă, în mod obișnuit, la puterea lui doi. Scala logaritmică a rezoluției este foarte convenabilă din punct de vedere matematic și va fi prezentată mai jos. Ea corespunde, de asemenea, percepției umane a intensității (Lindsay și Norman 1972). Rolul reprezentării multirezoluție cu unde amortizate este de a cuantifica creșterea informației despre semnal, obținută prin creșterea rezoluției.

Dacă se notează aproximarea funcției  $f$  la scala  $2^1$  cu  $A_{21}f$ , atunci, evident între scala  $2^{41}$  și scala mai brută  $2^1$  o parte a informației este pierdută. Ea poate fi regăsită într-un „semnal detaliat”  $D_{21}f$ . Amândouă operațiile [aproximarea și extragerea diferenței] sunt proiecții ortogonale ale subspațiilor  $L^2(R)$ , respective  $V_{21}$  și  $O_{21}$ , astfel încât  $O_{21} \oplus V_{21} = V_{2^{41}}$ . Bazele ortogonale ale ambelor spații sunt generate prin dilatarea și translatarea funcției scalare  $\Phi$  [pentru aproximații] și funcției cu unde amortizate  $\psi$  [pentru semnale detaliate]. Dacă se notează  $\psi_{2^j}(x) = 2^j \psi(2^j x)$ , atunci

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{2^j}(t - 2^{-j} n) \text{ și } \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2^j}(t - 2^{-j} n) \quad \text{formează bazele ortonormale ale lui } V_{21} \text{ și, respectiv, } O_{21}.$$

În final, un set de unde amortizate

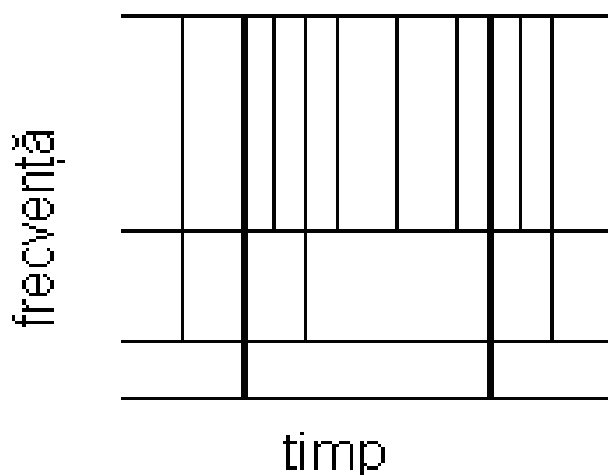
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{2^j}(t - 2^{-j} n) \quad (2.5)$$

este o bază ortonormală a lui  $L^2(R)$ . Funcția  $f$  este complet caracterizată de [și poate fi reconstruită din] coeficienții ei de unde amortizate :

$$D_{2^j}(f) = (f(t), \psi_{2^j}(t - 2^{-j} n)) \quad (2.6)$$

$$f(t) = \sum D_{2^j}(f) \psi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \quad (2.7)$$

Scala  $2^1$  corespunde unei octave din banda de trecere a semnalului. Dacă se notează frecvența Nyquist cu  $f_N$  atunci scala  $2^0$  [octava 0] acoperă frecvențele de la  $f_N/2$  la  $f_N$ , scala  $2^1$  acoperă frecvențele de la  $f_N/4$  la  $f_N/2$ , ș.a.m.d.



**Figura 2.** Împărțirea simbolică a spațiului timp-frecvență pentru descompunerea multirezoluție cu unde amortizate

Figura 2 arată împărțirea simbolică a planului timp-frecvență în mai multe „cutii Heisenberg”, corespunzător împărțirii parametrilor timp și frecvență, în care energia semnalului este exprimată printr-un singur coeficient de undă amortizată. În realitate, granițele dintre aceste cutii sunt diluate datorită suprapunerii suportului timp și frecvență al funcțiilor cu unde amortizate.

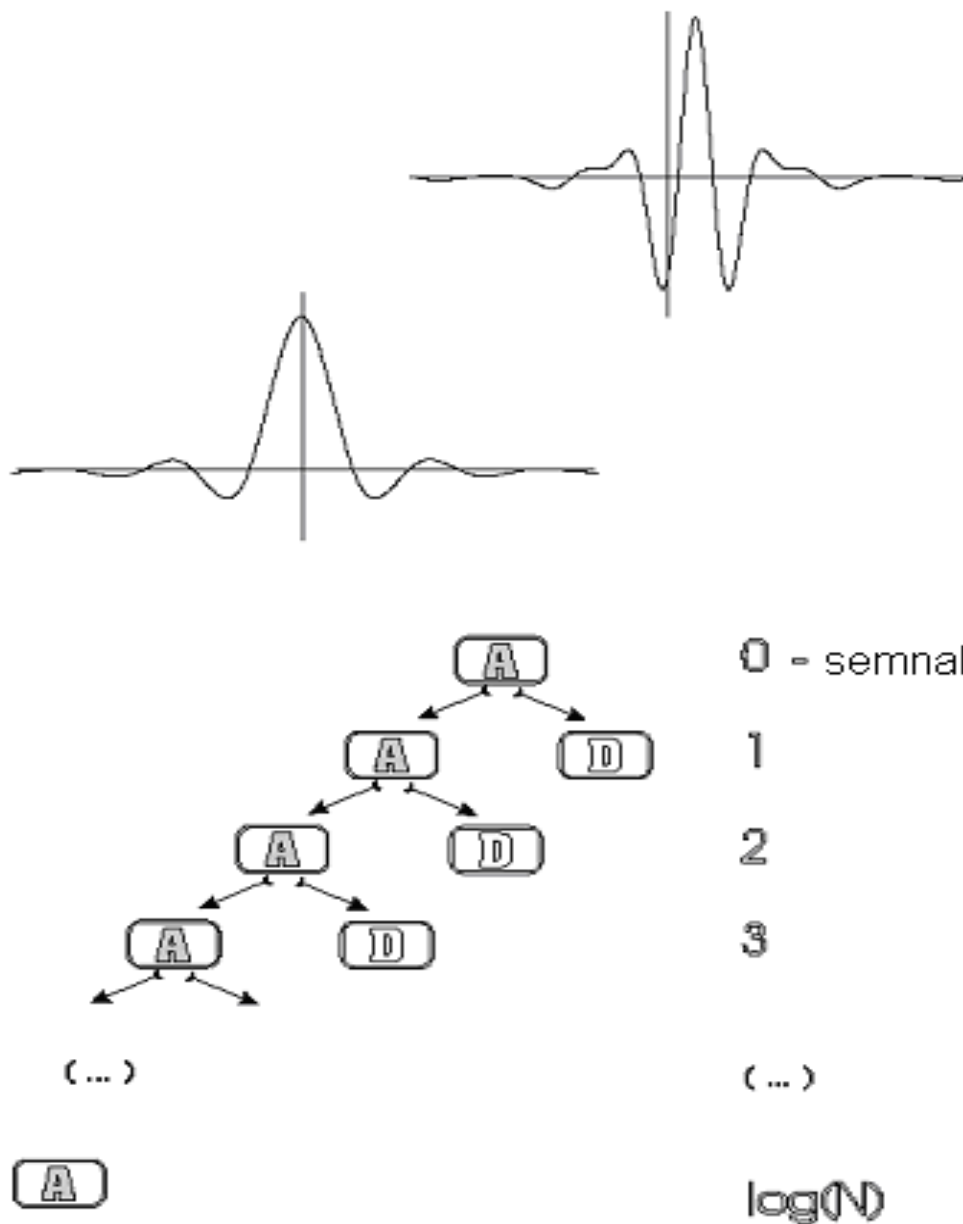
Undele amortizate folosite în experimentele numerice din următorul capitol au fost construite din „splinele” cubice așa cum s-a propus în (Mallat 1989). Forma unei funcții de scalare și undele amortizate corespunzătoare sunt arătate în Figura 3, împreună cu o schemă de descompunere multirezoluție.

Descompunerea multirezoluție [partea de jos a Figurii 3] conduce la un algoritm piramidal foarte eficient pentru calcularea coeficienților  $D_{2j}$ , bazat pe cuadratura filtrelor oglindă. Aproximarea unui

semnal la scala  $2^1$  conține toate informațiile necesare pentru a calcula aproximarea mai brută la scala  $2^{41}$ , precum și diferența dintre aceste aproximări. Descompunerea se realizează prin aplicarea unui filtru trece-jos [pentru  $A_{21}(f)$ ] și a unui filtru trece-bandă [pentru  $D_{21}(f)$ ], urmată de o eșantionare descendentă [păstrând fiecare al doilea eșantion]. Semnalul original poate fi recompus prin inversarea procedurii. De asemenea, un semnal se poate reconstrui dintr-un subset de coeficienți de oscilație amortizată, care corespunde cu reproducerea energiei semnalului din anumite regiuni timp-frecvență. În mod normal, reconstrucția dintr-un subset mic din cei mai mari coeficienți reproduce structurile principale ale semnalului. Prin păstrarea numai a acestor coeficienți se poate obține un raport mare de compresie.

În [Mallat 1992] am găsit un exemplu interesant de algoritm pentru eliminarea zgomotului bazat pe descompunerea multirezoluție cu unde amortizate. Pentru a o descrie pe scurt, trebuie mai întâi definit exponentul Lipschitz. Se spune că o funcție  $f(t)$  este uniformă Lipschitz  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) peste un interval  $[a, b]$  dacă și numai dacă există o constantă  $K$  astfel încât pentru orice  $(t_0, t_1) \in [a, b]^2$  să avem :

$$| f(t_0) - f(t_1) | \leq K | t_0 - t_1 | \quad (2.8)$$



**Figura 3.** În stânga sus – funcția de scalare; în dreapta sus – unda amortizată  
În partea de jos – schema descompunerii multirezoluție.  
A – aproximată, D – semnale detaliate la fiecare nivel

Dacă  $f(t)$  este diferențiabilă în  $t_0$ , atunci ea este Lipschitz  $\alpha = 1$ . Pentru valori mai mari ale lui  $\alpha$  funcția  $f(t)$  va fi mai „regulată” în  $t_0$ . Dacă  $f(t)$  este discontinuă dar limitată în vecinătatea lui  $t_0$ , atunci  $\alpha = 0$ . Exponentul Lipschitz  $\alpha$  al unei funcții poate fi măsurat din evoluția peste scalele valorii absolute ale transformatei cu unde amortizate, după cum se demonstrează în [Mallat 1992]. În concordanță cu valorile exponentului Lipschitz maximul transformatei cu unde amortizate corespunzător zgomotului alb [sau altei perturbații definite în termenii exponenților Lipschitz] poate fi înlăturat iar semnalul se poate reconstrui din maximul rămas al transformatei cu unde amortizate.

## 2.5 Rețele neuronale artificiale

McCulloch și Pitts (1943) au propus un model simplu al neuronului ca unitate de calcul elementară cu intrare ponderată de la neuronii înconjurători. Ieșirea binară depinde de depășirea unei valori de prag a intrării. Această ieșire binară poate fi una din valorile de intrare pentru alți neuroni. Influența ieșirii neuronului  $i$  asupra intrării neuronului  $j$  este modificată prin coeficienții multiplicativi  $w_{ij}$ , denumiți ponderi de conexiune. Dacă  $w_{ij} > 0$  conexiunea este excitatoare, iar dacă  $w_{ij} < 0$  conexiunea este inhibitoare.

Mai târziu, în schimbul funcției binare cu prag a fost propusă o funcție sigmoidală mai aplatizată. Următoarea ecuație reflectă considerațiile de mai sus :

$$n_i(t_1) = f_{\sigma} \left( \sum w_{ij} n_j(t) - \mu_i \right) \quad (2.9)$$

unde  $n(t)$  – este activitatea neuronului  $i$  la timpul  $t$ ,

$w_{ij}$  – este ponderea conexiunii de la neuronul  $i$  la neuronul  $j$ ,

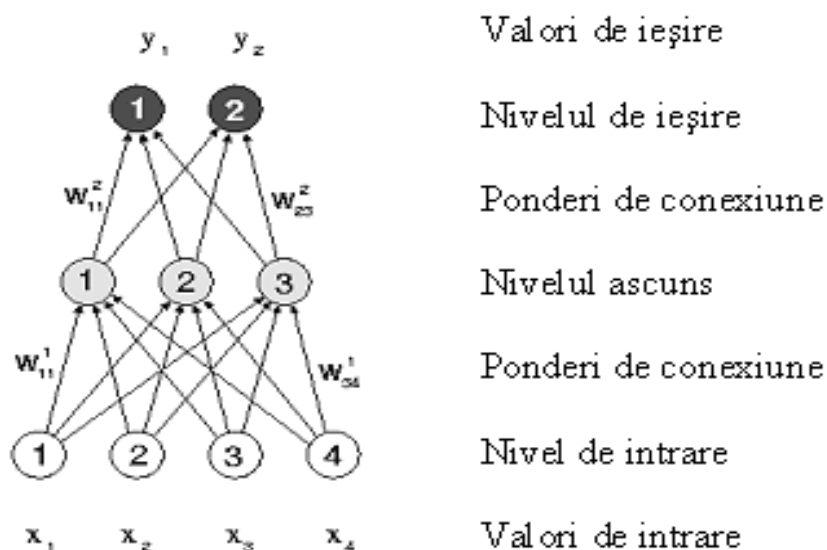
$\mu_i$  – este valoarea de prag pentru neuronul  $i$ ,

$f_{\sigma}(x) = 1/(1+e^{-x})$ , este funcția sigmoidă care, uzual, înlocuiește funcția de pas  $\Theta(x)$  propusă inițial.

Astfel de „neuroni” au fost, inițial, propuși pentru modelarea funcționării creierului. Totuși, asemănarea cu neuronii reali din creier este numai superficială – modelul fiind mult prea simplificat. Pe

de altă parte, o astfel de aproximare simplificată oferă multe avantaje în aproximarea și clasificarea problemelor. De aceea, rețelele neurale artificiale (ANN) au evoluat într-o unealtă matematică pură. Tipul cel mai folosit în practică este ANN multinivel cu reacție pozitivă. Rețelele neurale artificiale pot fi folosite în studierea creierului la fel ca în alte sarcini ce necesită, de exemplu, abstractizarea cunoașterii dintr-un set de date de intrare/ieșire, pentru care mecanismul relațiilor fundamentale nu este cunoscut.

Bazați pe ecuația (2.9) putem construi o rețea alcătuită numai din trei nivele pentru a aproxima orice funcție continuă cu precizia dorită (Cybenko 1989). Totuși, este necesară o rețea cu reacție pozitivă cu patru nivele pentru a realiza exact toate partițiile posibile ale spațiului de intrare (Kolmogorov).



**Figura 4.** Reprezentarea schematică a unei rețele neurale artificiale (ANN) cu trei nivele

Figura 4 prezintă un exemplu de ANN cu reacție pozitivă cu trei nivele. Primul nivel [uneori omis în numerotare] este nivelul de intrare, care recepționează valorile de intrare  $x_i$ . Vectorul  $\{x_i\}$  reprezintă datele de intrare după o posibilă preprocesare. Elementele din nivelul de intrare nu realizează nici o operație asupra datelor de intrare, trecând valorile multiplicat cu ponderile de conexiune  $w_{ij}$  spre nivelul ascuns. Elementele din acest nivel generează o valoare de ieșire, de exemplu, prin aplicarea

relației (2.9) peste suma ponderată a intrărilor. În general, pot fi prezente mai multe nivele ascunse, nu numai unul. În final, suma ponderată a ieșirilor de la ultimul nivel ascuns ajunge la nivelul de ieșire. Elementele din nivelul de ieșire produc o valoare de ieșire  $y_i$ , prin aplicarea din nou a relației (2.9).

Cunoașterea folosită pentru învățarea rețelei trebuie să constea dintr-un set de perechi de vectori : vectorul „întrebare”  $\{x^m\}$  și vectorul „răspuns” cunoscut  $\{d^m\}$ .

Asemenea vectori împerecheați în seturi  $\{x^m ; d^m\}$ , ( $m = 1, \dots, M$ ) constituie „lecția”. „Învățarea” unei asemenea „lecții” constă în ajustarea ponderilor de conexiune  $w_{ij}$  pentru a minimiza ultima eroare medie pătratică între ieșirile dorite  $d^m$  și răspunsurile rețelei  $y^m$  :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (d^m - y^m)^2 \quad (2.10)$$

Uzual, se folosește panta gradientului de prim ordin cu un termen de impuls :

$$\omega_{ij}^m(t-1) = \omega_{ij}^m(t) - \eta \frac{\delta E}{\delta \omega(t)} - \alpha (\omega_{ij}^m(t) - \omega_{ij}^m(t-1)) \quad (2.11)$$

unde  $\eta$  este denumită rata de învățare, iar  $0 < \alpha < 1$ .

Un mod clasic de aplicare a unei asemenea rețele într-o problemă particulară constă din următoarele faze :

#### 1. Alegerea topologiei rețelei

Problemele întâlnite până în acest punct includ numărul de nivele, schemele interconectării lor și mărimea nivelelor de intrare și ieșire. Mărimea nivelelor de intrare și ieșire depinde puternic de caracteristicile particulare ale problemei cercetate. Mărimea nivelului de ieșire trebuie să fie egală cel puțin cu numărul de biți ce reprezintă caracteristicile recunoscute de rețea. Numărul neuronilor de intrare depinde natural de mărimea vectorului de date de intrare după preprocesare.

## 2. Alegerea preprocesării intrării

Din punct de vedere teoretic, o rețea neurală artificială cu numai un nivel ascuns poate aproxima orice funcție continuă, adică orice aplicație. În principiu, asta înseamnă că o astfel de rețea poate dezvolta, de asemenea, orice funcție pe care am vrea s-o includem în preprocesare (Cybenko 1989). Punerea în practică a acestei presupunerii necesită folosirea unei rețele mai mari învățată peste seturi de date mult mai mari. Într-un astfel de caz, posibilitățile de abstractizare ale rețelei, măsurate, uzual, ca performanța obținută peste un set de date altul decât setul de învățare, sunt micșorate dramatic. S-a demonstrat în (Hertz și colectivul 1993) că probabilitatea de abstractizare corectă scade cu raportul dintre informația relevantă față de gradație supra informația nerelevantă față de gradația intrării rețelei. Aceasta indică importanța alegerii cu grijă a datelor de intrare și a preprocesării.

S-a demonstrat în (Hertz și colectivul 1993) că probabilitatea de abstractizare corectă scade cu raportul dintre informația relevantă față de clasificare supra informația nerelevantă față de clasificarea intrării rețelei. Aceasta indică importanța alegerii cu grijă a datelor de intrare și a preprocesării.

## 3. Faza învățării

Un set de învățare este compus din perechi de date intrare-ieșire. Datele de ieșire pot consta în clasificarea obținută prin alte mijloace (de exemplu, expertiza umană) decât cele emulate cu ajutorul rețelei. Pentru fiecare vector de date prezentat se calculează răspunsul rețelei. Pe baza diferenței dintre răspunsul rețelei și marginea „răspunsului” față de intrarea prezentată în setul de învățare, ponderile de conexiune ale rețelei sunt modificate în concordanță cu regula de învățare (adică algoritmul de propagare inversă a erorii). Procedura se repetă până când se obține o performanță satisfăcătoare a rețelei peste setul de învățare.

## 4. Testarea

Cea mai interesantă caracteristică a ANN este posibilitatea lor de abstractizare dincolo de setul de învățare. Obținerea unei abstractizări satisfăcătoare necesită adesea ajustarea fină a

întregului sistem, inclusiv preprocesarea intrării, așa cum se va prezenta mai jos. Posibilitățile de abstractizare pot fi verificate prin performanța rețelei pe un set de date altul decât setul de învățare.

## 2.6. Căutarea adaptării (Matching Pursuit)

Limitările naturale ale transformatei cu unde amortizate clasice în procesarea semnalelor biomedicale se datorează setului relativ mic de forme de undă folosit să exprime dispersia semnalului. Se poate spune că dicționarul folosit în WT este limitat. În cazul transformatei ortogonale cu unde amortizate sau a pachetelor cu unde amortizate se lucrează cu cel mai mic dicționar posibil – pe baze ortonormale.

Din contră, limbajul natural este foarte redundant : există multe cuvinte cu înțeles apropiat. Datorită acestui factor suntem capabili să exprimăm idei foarte subtile și complicate în relativ puține cuvinte – exact ca în poezie. Pe de altă parte, să presupunem că aceleași idei (sentimente, gânduri) sunt descrise de o persoană ce folosește un dicționar limitat. Nu numai că expresia va crește în mărime, dar va pierde mult din semnificație și, desigur, eleganță.

Dicționarele cu redundanță mică [sau fără, ca în cazul unei baze] sunt convenabile atât pentru calcule cât și pentru interpretare. Totuși, dacă principalul scop este adaptivitatea reprezentării, trebuie extins repertoriul funcțiilor de bază. Poate fi generat un dicționar mare și redundant de forme de undă de bază, de exemplu prin scalarea, translatarea și, spre deosebire de WT, **modularea** unei singure funcții fereastră  $g(t)$  :

$$g_1(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\xi t} \quad (2.12)$$

unde  $s > 0$  – este scala,

$\xi$  - este frecvența de modulație,

$u$  – este translația.

Indexul  $I = (s, \xi, u)$  descrie setul de parametri. Funcția fereastră  $g(t)$  este de regulă pară iar energia ei este concentrată cel mai mult în jurul lui  $u$  într-un interval de timp proporțional cu  $s$ . În domeniul frecvență energia este concentrată cel mai mult în jurul lui  $\xi$  cu o împrăștiere proporțională cu  $1/s$ . Minimul dispersiei timp-frecvență se obține dacă  $g(t)$  este Gauss-iană. Dicționarele transformatei Fourier ferestruite și a transformatei cu unde amortizate pot fi obținute ca subseturi din acest dicționar, definite prin anumite restricții în alegerea parametrilor. În cazul transformatei Fourier ferestruite scala  $s$  este constantă – egală cu lungimea de undă a ferestrei – iar parametrii  $u$  și  $\xi$  sunt eșantionați uniform. În cazul WT modulația în frecvență este limitată de restricția asupra parametrului frecvență  $\xi = \xi_0/s$ ,  $\xi_0 = \text{const.}$

Rămâne de ales dintr-un astfel de dicționar forme de undă care să se potrivească cel mai bine structurilor semnalului, adică să exprime optim dispersia semnalului. Se poate defini o aproximare  $\varepsilon$  optimă ca o extensie care minimizează eroarea  $\varepsilon$  a aproximării semnalului  $f$  prin  $M$  forme de undă :

$$\varepsilon = |f - \sum (f, g_i) g_i| - \min \quad (2.13)$$

Găsirea unei astfel de aproximări  $\varepsilon$  optime este o problemă „NP-hard<sup>2</sup>” (Davis 1994). Aceasta se poate dovedi demonstrând că „acoperirea exactă prin problema cu 3 seturi” (Garey și Johnson 1979) poate fi transformată în polinom de timp într-o problemă de aproximare  $\varepsilon$  optimală. Astfel, un algoritm care soluționează problema de aproximare  $\varepsilon$  poate soluționa „acoperirea exactă prin problema cu 3 seturi”, care este cunoscută a fi completă NP.

Se poate spune că reprezentarea optimă – sau toată informația necesară pentru a o calcula - este criptată într-o secvență de numere ce constituie o serie dinamică, dar nu avem nici cheia [subiectul 1, paragraful 1.1] nici o modalitate eficientă să spargem codul.

O altă problemă provine din faptul că o astfel de extensie optimă ar fi instabilă față de numărul de forme de undă  $M$  folosite, deoarece modificarea lui  $M$ , chiar numai cu unu, poate duce la modificarea completă a setului de forme de undă alese pentru reprezentare. Aceste probleme ne forțează să alegem soluții sub-optimale.

O extensie sub-optimală a unei funcții peste un astfel de dicționar redundant poate fi găsită cu ajutorul **algoritmului de căutare a adaptării**.

În primul pas al procedurii iterative se alege un vector  $g_l$  care dă cel mai mare produs cu semnalul  $f(t)$  :

$$f - \langle f, g_l \rangle g_l - R^\perp f \quad (2.14)$$

Apoi, vectorul rămas  $R^\perp f$  obținut după aproximarea funcției  $f$  în direcția  $g_l$  este descompus în mod similar. Procedura iterativă se repetă până când se obțin rezultatele:

$$R^n f = \langle R^n f, g_l \rangle g_l - R^{n-1} f \quad (2.15)$$

În acest mod semnalul  $f$  este descompus într-o sumă de atomi timp-frecvență, aleși să adapteze optim resturile semnalului:

$$f - \sum_{n=0}^m \langle R^n f, g_l \rangle g_l - R^m f \quad (2.16)$$

S-a demonstrat (Davis și colectivul 1994) că procedura converge către  $f(t)$ , adică :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \| R^m f \| = 0 \quad (2.17)$$

De aici :

$$f(t) = \sum_{n=0}^m \langle R^n f, g_l \rangle g_l \quad (2.18)$$

și

$$\| f \|^2 = \sum_{n=0}^m \| \langle R^n f, g_l \rangle g_l \|^2 \quad (2.19)$$

Se pot vizualiza rezultatele descompunerii MP în planul timp-frecvență prin adăugarea distribuției Wigner fiecăruia din atomii selectați. Distribuția Wigner a funcției  $f(t)$  este definită ca :

$$Wf(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) f(t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.20)$$

Calculând distribuția Wigner din întreaga descompunere conform definiției din ecuația (2.18) ar rezulta

$$Wf(t, \omega) = \sum_{n=0}^m | \langle R^n f, g_l \rangle |^2 W g_l(t, \omega) \quad (2.21)$$

$$\sum_{n=0}^{-\infty} \sum_{m=0, m=n}^{-\infty} \langle R^n f, g_l \rangle \langle R^m f, g_l \rangle W[g_l, g_l](t, \omega)$$

unde distribuția transversală Wigner  $W[f, h](t, \omega)$  a funcțiilor  $f$  și  $h$  este definită prin

$$W[f, h](t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) h(t + \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.22)$$

Suma dublă din ecuația (2.21), care conține distribuția transversală Wigner a diferiților atomi din extensia (2.18), corespunde termenilor transversali prezenți, în general, în distribuția Wigner. Acești termeni trebuie eliminați pentru a obține o imagine clară a distribuției de energie în planul timp-frecvență. Înlăturarea acestor termeni din ecuația (2.21) este directă – păstrăm numai prima sumă. De aceea, pentru vizualizarea densității de energie în planul timp-frecvență al reprezentării semnalului obținut cu ajutorul MP, se definește o mărime  $Ef(t, \omega)$ :

$$Ef(t, \omega) = \sum_{n=0}^m | \langle R^n f, g_l \rangle |^2 W g_l(t, \omega) \quad (2.23)$$

Distribuția Wigner a unui atom  $g_l$  conservă energia acestuia în planul timp-frecvență:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} Wg(t, \omega) dt d\omega = |g_l|^2 - 1 \quad (2.24)$$

Combinând aceasta cu conservarea energiei extensiei MP [ecuația (2.19)] și ecuația (2.22) rezultă :

$$\iint_{-\infty}^{\infty} Ef(t, \omega) dt d\omega = |f|^2 \quad (2.25)$$

Aceasta justifică interpretarea mărimii  $Ef(t, \omega)$  ca densitate de energie a semnalului  $f(t)$  în planul timp-frecvență. Toate referirile din această lucrare la „hărțile Wigner” se bazează pe formula (2.23) – exceptând faptul că suma nu este infinită.

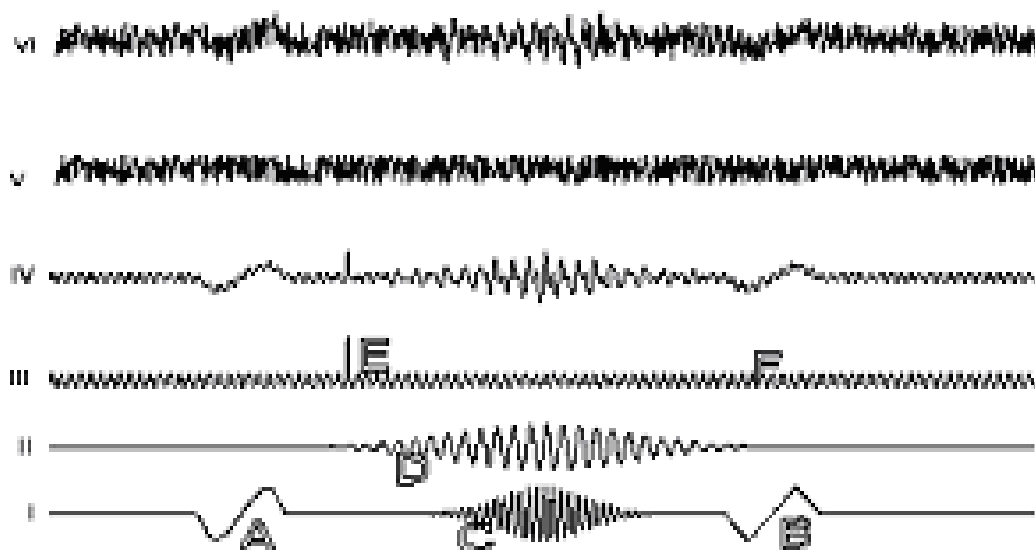
## Capitolul 3.

### Simulări și observații practice

Figura 5 prezintă componentele semnalelor simulate în scopul prezentării metodelor în timp și frecvență. Semnalul de bază, notat *IV*, este o sumă de semnale *I*, *II* și *III*, care au fost desenate pentru a prezenta clar structurile determinante.

Structura *A* este o sinusoidă modulată cu puterea a patra a lui Gauss, structura *B* este construită din linii drepte, iar structurile *C* și *D* sunt funcții Gabor, adică sinusoidale modulate Gauss-ian. Acestea au frecvențe de modulație și lățimi în timp diferite și sunt centrate în același punct în timp. Structura *E* este derivată din funcția delta Dirac [cu un singur punct de discontinuitate], *F* – undă sinusoidală cu oscilație liberă prin toate perioadele.

Un zgomot similar și cu dispersia de 2,5 ori mai mare [semnalul *V*] a fost adunat cu semnalul *IV* pentru a rezulta semnalul de zgomot *VI*.



**Figura 5.** Componentele semnalelor simulate

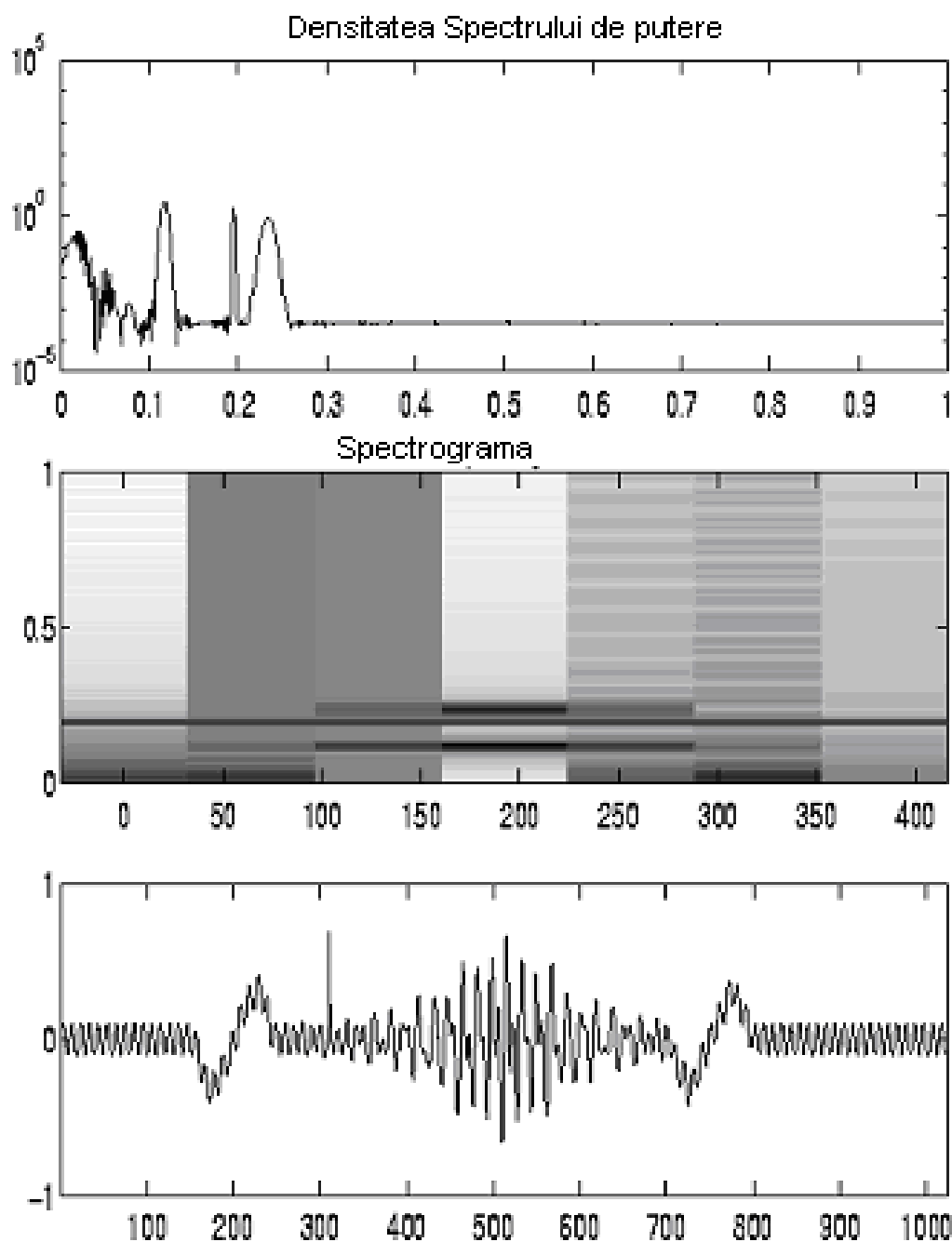
### 3.1. Transformata Fourier ferestruită

Figura 6 prezintă analiza spectrală Fourier a semnalului *IV* [desenată în partea de jos]. În partea superioară este desenată estimarea Fourier a densității spectrale în funcție de frecvență [abscisa]. De

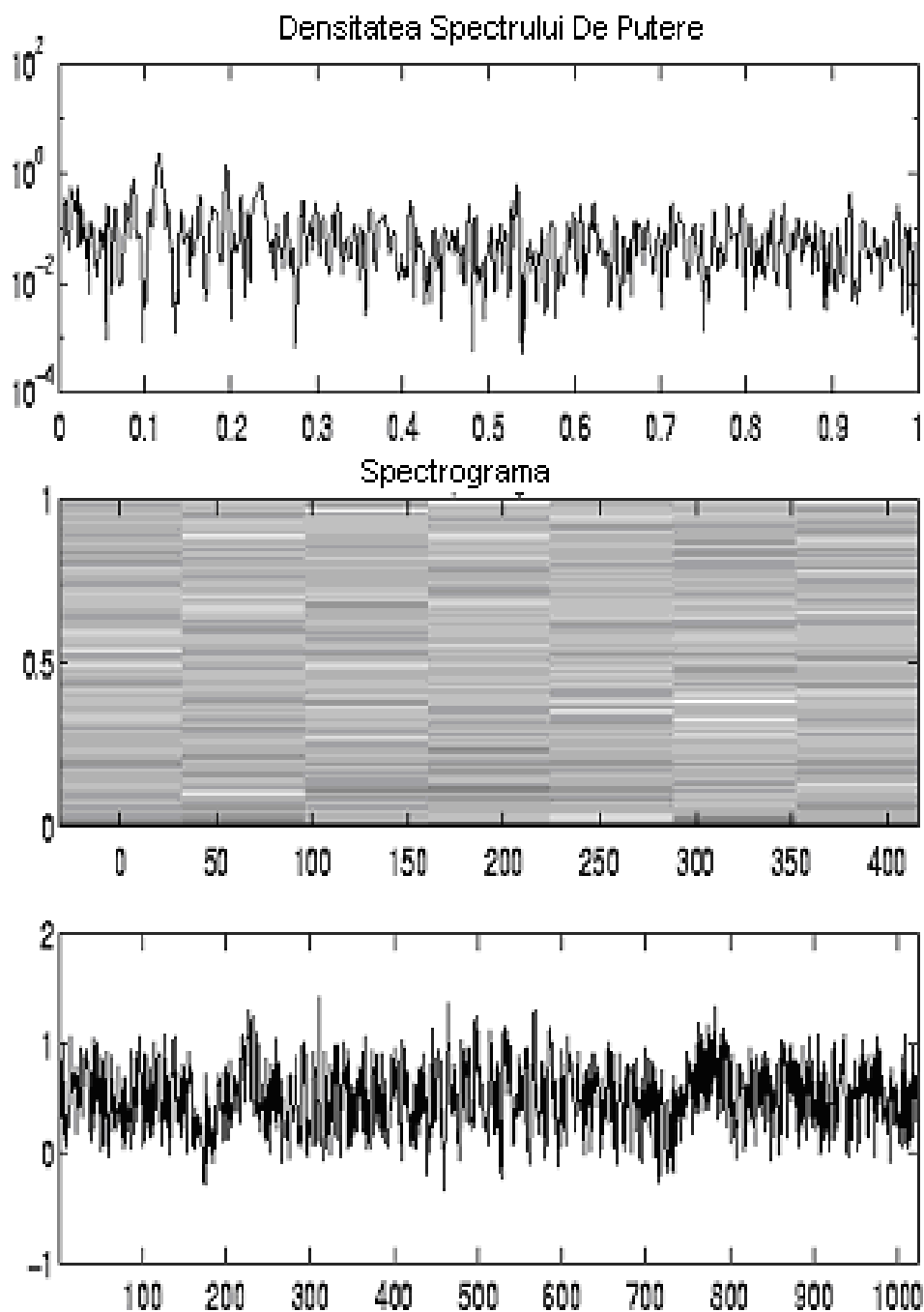
reținut maximul ascuțit corespunzător sinusoidei  $F$  și maximele mai late în frecvență ale vârfurilor  $C$  și  $D$ . Energia structurilor  $A$  și  $B$  este concentrată în regiunea de frecvență joasă. Discontinuitatea cu un singur punct  $E$  este reflectată în regiunile cu frecvență mai mare; totuși, este imposibil de interpretat vizual reprezentarea ei fără informații despre faza transformatei Fourier.

Partea din mijloc a Figurii 6 prezintă o spectrogramă, adică reprezentarea unei transformate Fourier ferestruite. Rezoluția în timp este limitată la lățimea în timp a funcției fereastră. De aceea, este greu de tratat reprezentarea structurilor semnalului în acest plan timp-frecvență ca fiind semnăturile lor în timp-frecvență. Cea mai bună rezoluție în frecvență este obținută pentru structura  $F$ , reprezentată ca o frecvență constantă ce oscilează în toate epocile analizate. Cu toate acestea, precizia de identificare a acestei frecvențe, în comparație cu transformata Fourier a întregului segment, este limitată de faptul că estimarea spectrală este calculată din epoci mai scurte. Energia semnalului delta Dirac  $E$  este împărțită în două secvențe consecutive de timp, din cauza suprapunerii ferestrelor de timp  $g$  [ecuația (2.2)].

Figura 7 prezintă aceleași desene din figura precedentă pentru semnalul de zgomot  $VI$ . Din desenul densității spectrale, în partea de sus, se pot încă extrage vârfurile corespunzătoare sinusoidei  $F$  și vârfului cu frecvență mai mică  $D$ . Maximul corespunzător vârfului de frecvență mai mare  $C$  este un pic distorsionat în comparație cu figura precedentă. Alte structuri sunt înecate în zgomot. Nici una din aceste structuri nu poate fi identificată cu siguranță în spectrograma desenată în partea din mijloc.



**Figura 6** Jos – semnalul IV din Figura 5; Sus – estimarea Fourier a densității spectrale de putere;  
Mijloc – spectrograme, adică realizarea unei transformate Fourier ferestruite



**Figura 7** Jos – semnalul de zgomot VI din Figura 5; Sus – estimarea Fourier a densității spectrale de putere; Mijloc – spectrograma, adică transformata Fourier ferestruită

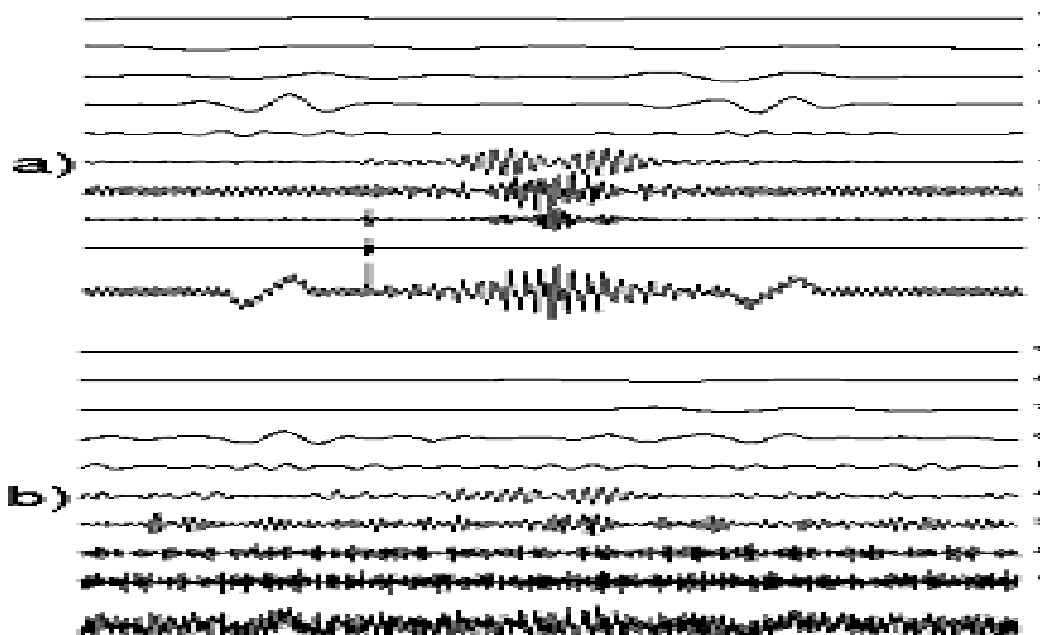
## 3.2. Transformata discretă ortogonală cu unde amortizate (wavelet)

### 3.2.1. Rezoluția în frecvență

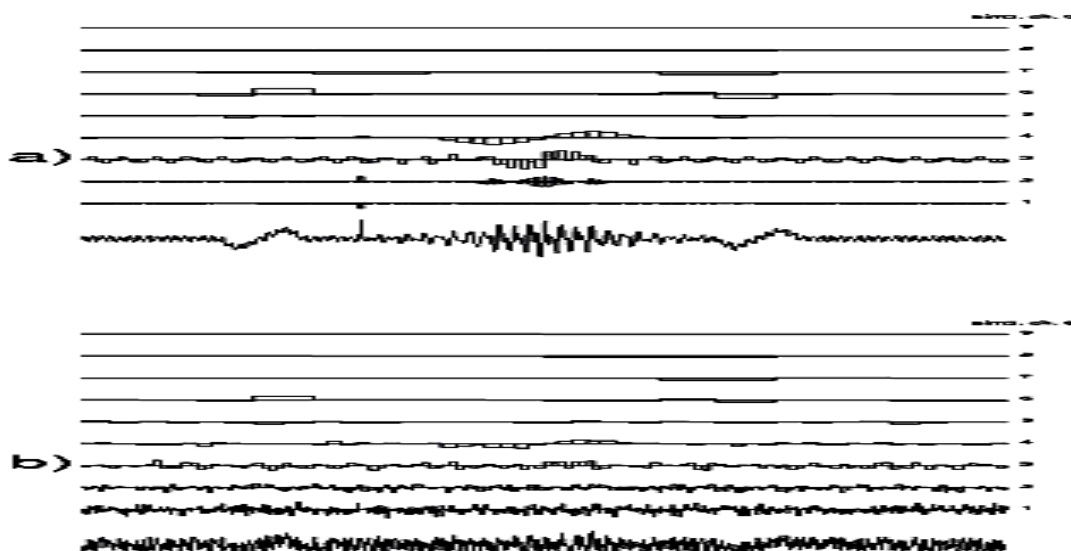
Figura 8 a) prezintă rezultatele unei descompunerii multirezoluție a semnalului simulat *IV* din Figura 5, desenat în partea de jos. Curbele numerotate de la 1 la 9 sunt reconstrucțiile semnalului din toți coeficienții de unde amortizate la scala dată. Reconstrucția semnalului din toți coeficienții de unde amortizate la scala dată corespund unei filtrări trece-bandă – vezi, de asemenea, paragraful 3.2.4. Se observă că energia vârfulor *C* și *D* este diminuată pe scalele 2 și 4.

Figura 8 b) arată descompunerea semnalului de zgomot *VI* prezentat mai sus. Din nou, semnalul descompus este desenat în partea de jos. Mai sus, sunt arătate reconstrucțiile semnalului la scalele descompunerii cu unde amortizate, cu frecvențele corespunzătoare scăzând în sus. Comparând aceste două figuri vom nota că energia zgomotului este concentrată în principal în scalele corespunzătoare frecvențelor superioare [mai jos în desen]. Pe aceste scale, caracteristicile semnalului, arătate în Figura 8 a), sunt înecate în zgomot. Structurile de frecvență mai mică sunt, relativ, mai puțin afectate de adăugarea zgomotului.

Figura 9 arată o modalitate alternativă de prezentare a rezultatelor unei descompunerii multirezoluție cu unde amortizate [pentru aceleași semnale descompuse în Figura 8]. Pe fiecare scală, sunt arătate valorile coeficienților de unde amortizate față de reconstrucțiile semnalului. Înălțimile dreptunghiurilor la fiecare nivel indică valorile coeficienților corespunzători de unde amortizate [ecuația (2.6)]. Octavele sunt numerotate de la 1 la 9 pe partea dreaptă iar frecvențele corespunzătoare scad în sus.



**Figura 8** Descompunerea multirezoluție a semnalelor simulate a)IV , b)VI din Figura 5. Reconstrucțiile din coeficienții de unde amortizate la octavele corespunzătoare [marcate de la 1 la 9 în dreapta



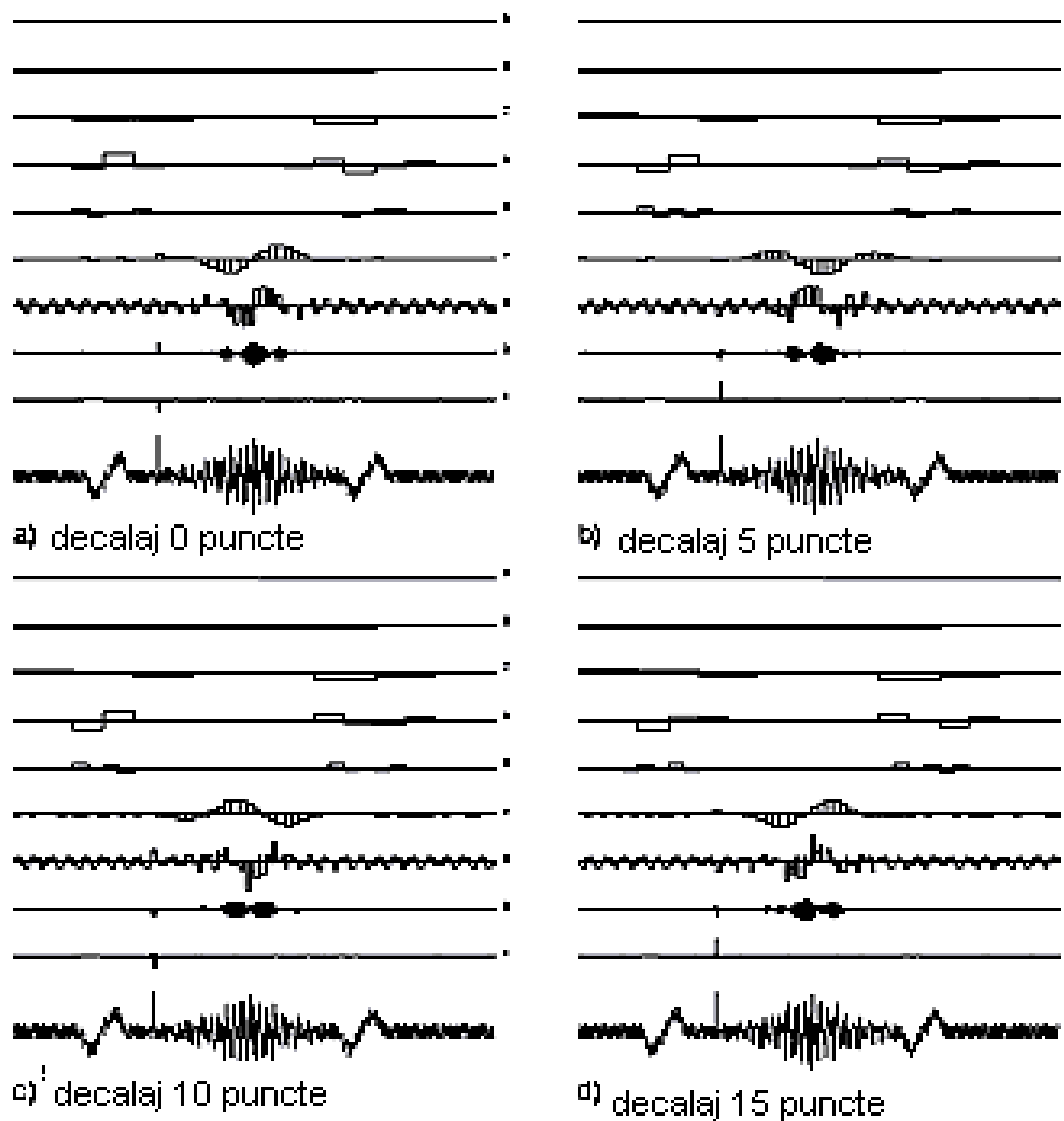
**Figura 9** Descompunerea multirezoluție a semnalelor simulate a)IV; b)VI din Figura 5. Înălțimea dreptunghiurilor pe fiecare scală corespunde valorilor coeficienților discreți de unde amortizate.

### 3.2.2. Sensibilitatea reprezentării față de un decalaj în timp al ferestrei de analiza

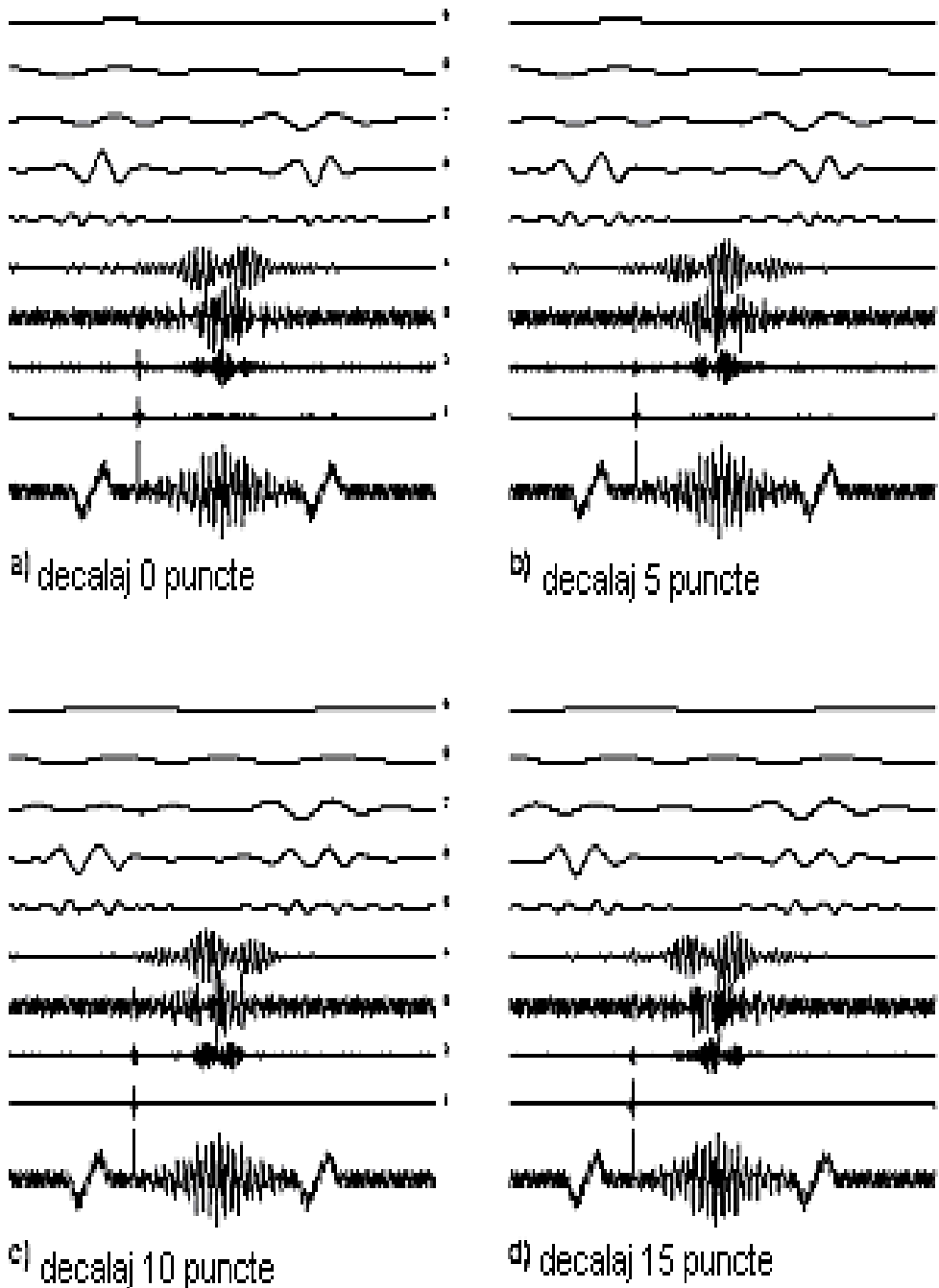
Când se folosește parametrizarea cu unde amortizate, trebuie avut grijă la sensibilitatea reprezentării față de un decalaj în timp al ferestrei analizate. Aceasta înseamnă că, dacă mutăm începutul segmentului analizat cu câteva intervale în timp, se obține un set diferit de coeficienți de unde amortizate, care să descrie aceleași structuri. Sau, cu alte cuvinte, energia structurii semnalului poate fi distribuită între coeficienții învecinați de unde amortizate într-un mod diferit, în funcție de poziția relativă a secțiilor analizate ale semnalului.

Acest efect este prezentat în Figurile 10 și 11, unde semnalul *IV* din Figura 5 a fost supus descompunerii multirezoluție după mutarea ferestrei analizate cu 0, 5, 10 și 15 intervale în timp. Figura 10 arată că valorile coeficienților de unde amortizate care descriu aceeași structură diferă în funcție de decalaj. Se poate observa clar acest efect pe două funcții Gabor [structurile C și D din Figura 5] în centrul semnalului, la nivelele 2 și 5. Modelul coeficienților de unde amortizate care reprezintă aceste structuri variază în funcție de decalajele următoare, pentru a ajunge aproape de forma primară după un decalaj de 15 intervale. Pentru un semnal cu 1024 intervale, cum este cazul semnalelor din Figura 5, pe nivelul patru avem 64 de coeficienți și fiecare din ei corespunde la 16 intervale din semnalul analizat. De aceea, 16 intervale este primul decalaj care conservă reprezentarea pe scala 4 și mai jos. Deoarece 15 este singura valoare apropiată, reprezentarea nu este complet invariantă, lucru vizibil mai ales pe scalele 2 și 3. Decalajul în timp afectează foarte puțin semnalul delta Dirac, deoarece energia lui este reprezentată în regiunea cu frecvențe înalte, unde rezoluția în timp este foarte bună.

În Figura 11 se observă același efect pentru semnalele reconstruite la rezoluții diferite. Aceste curbe sunt reconstrucții ale semnalului din toți coeficienții dintr-o anumită scală. O astfel de operație corespunde filtrării trece-bandă a semnalului [vezi paragraful 3.2.4.]. Totuși, trebuie reținut că rezultatele acestui tip de filtrare depind de decalajul în timp al ferestrei de analizat.



**Figura 10** Descompunerea multirezoluție a semnalului simulat decalat cu 0, 5, 10 și 15 intervale în timp. Reprezentarea coeficienților discreți de unde amortizate



**Figura 11** Descompunerea multirezoluție a semnalului simulat, decalat cu 0, 5, 10 și 15 intervale în timp. Curbele marcate de la 1 la 9 sunt reconstrucții din coeficienții de unde amortizate la scala corespunzătoare de  $2^1$

### 3.2.3. Condiții la limită

Reprezentarea în timp a funcțiilor cu unde amortizate, îndeosebi la frecvențe joase, depășește limitele semnalului analizat. De aceea, pentru a putea analiza numeric trebuie făcute unele presupuneri despre comportarea semnalului în afara ferestrei de măsurare. În practică, aproximarea cea mai folosită este de a presupune simetria (sau antisimetria) față de primul și ultimul interval, care dă rezultate bune în cele mai multe cazuri. Totuși, pentru unele clase de semnale, se obțin rezultate mai bune prin setarea semnalului pe 0 în afara ferestrei de măsurare. Un exemplu de astfel de caz este furnizat de emisiile otoacustice (OAE), ce sunt aproape zero la ambele capete [Figura 12].

### 3.2.4. Calcularea produselor cu bandă limitată a două semnale

Coeficienții de unde amortizate pot servi ca bază pentru calculul eficient al anumitor coeficienți spectrali și transversal-spectrali. Având în vedere ecuația (2.7) din paragraful 2.2. trebuie reținut că reconstrucția semnalului din coeficienții de unde amortizate dintr-un singur nivel [scala  $2^1$ ] este echivalentă cu filtrarea trece-bandă [vezi, de exemplu, Figura 8]. Produsul normalizat a două semnale  $f$  și  $g$  reconstruite ca mai sus, ne dă corelația transversală în banda de frecvență corespunzătoare scalei  $2^1$ .

Dacă notăm cu  $f_j$  și  $g_j$  reconstrucțiile funcțiilor  $f$  și  $g$  din coeficienții de unde amortizate la scala  $2^1$ , atunci:

$$\begin{aligned} \langle f_j(t), g_j(t) \rangle &= \sum_t \left\{ \sum_n [D_{2^{-1}n}(f) \psi_2(t - 2^{-1}n)] - \sum_n [D_{2^{-1}m}(g) \psi_2(t - 2^{-1}m)] \right\} \\ &= \sum_n \sum_m \{ D_{2^{-1}n}(f) D_{2^{-1}m}(g) \sum_t (\psi_2(t - 2^{-1}n) \psi_2(t - 2^{-1}m)) \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

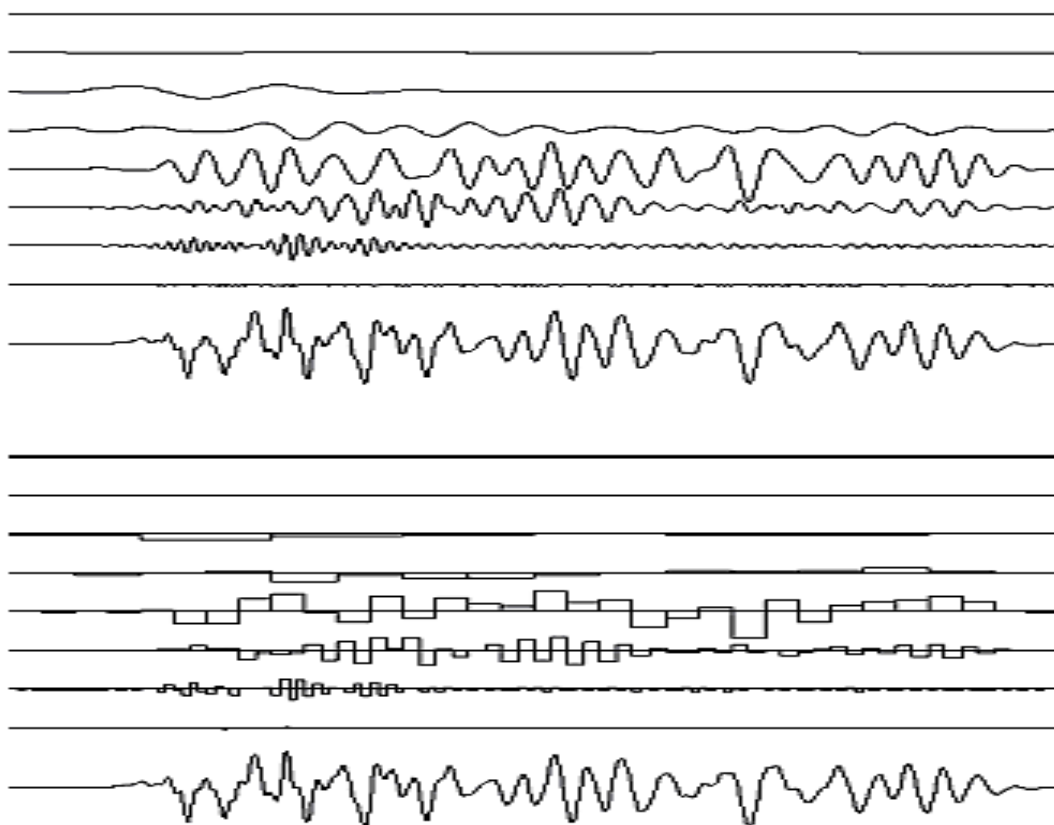
În cazul transformatei ortogonale cu unde amortizate:

$$\sum_t (\psi_2(t - 2^{-1}n) \psi_2(t - 2^{-1}m)) = \tau_{nm} \quad (3.2)$$

De aici :

$$\langle f_j(t), g_j(t) \rangle = \sum_n \sum_m \{ D_{2^n}^n(f) D_{2^m}^m(g) \tau_{mn} = \sum_n D_{2^n}^n(f) D_{2^n}^n(g) \quad (3.3)$$

Aceasta arată că corelația a două semnale într-o bandă de frecvență corespunzătoare unei octave a descompunerii multirezoluție poate fi eficient obținută ca produs scalar de vectori de coeficienți de unde amortizate din scala dată.



**Figura 12** Descompunerea multirezoluție a unei emisii otoacustice; partea de sus – nivelele reconstruite; partea de jos – coeficienții de unde amortizate. Condițiile la limită pentru WT sun setarea la zero în afara ferestrei de măsurare

### 3.3. Pachete cu unde amortizate

Investigarea atentă a figurii 3 poate ridica o întrebare: de ce descompunem numai semnalele approximate. Descompunerea semnalelor detaliate este ideea principală a aproximării prin pachete cu unde amortizate (Coiffman și colectivul 1993). Coeficienții obținuți astfel formează o reprezentare redundantă. Aceasta conține  $2^{11}$  baze ortonormale ( $N$  – numărul de intervale din semnalul analizat). Algoritmul cel mai bun constă din alegerea uneia din aceste baze în concordanță cu un criteriu anumit. Cel mai folosit este criteriul entropiei minime a reprezentării.

Baza este adaptată printr-o procedură duală la întreg segmentul analizat. Alegerea unei baze este, de obicei, condusă de semnalele tranzitorii cu energia cea mai mare, cu prețul reprezentării structurilor mai slabe. În comparație cu reprezentarea ortogonală cu unde amortizate, pachetele cu unde amortizate sunt, cu siguranță, un pas înainte spre adaptivitatea reprezentării. Totuși, cu acest pas pierdem unul din avantajele date de bazele fixe – parametrizarea gata pentru comparare statistică. După cum va fi arătat în capitolul 4, coeficienții de unde amortizate calculați în baze ortonormale fixe pot fi organizați în vectori care să descrie fiecare din semnalele analizate în același spațiu.

Astfel de vectori pot fi folosiți direct ca intrare pentru proceduri statistice și pentru compararea caracteristicilor semnalelor. În cazul pachetelor cu unde amortizate, baza este croită separat pentru fiecare semnal și, de aceea, fiecare semnal este descris în termeni cu alți coeficienți și compararea lor nu este directă. Totuși, această problemă este prezentă în toate metodele cu semnal adaptiv și nu poate fi considerată un dezavantaj major. Calculele pot fi bazate pe algoritmi descriși în paragraful 2.2, conducând la o implementare rapidă, care constituie unul din avantajele principale ale pachetelor cu unde amortizate față de metodele cu semnal adaptiv.

Figura 13 arată rezultatele descompunerii în pachete de unde a semnalelor simulate. Deși în fiecare caz este aleasă o bază optimă pentru semnal, chiar în Figura 13 a) [descompunerea semnalului fără adăugarea zgomotului] se observă că pozițiile coeficienților cei mai tari nu corespund exact, îndeosebi în timp, cu pozițiile semnalelor tranzitorii prezente în semnal. Una din excepții este semnalul delta Dirac, care este reprezentat cu mare acuratețe. Unda sinusoidală ce oscilează în tot semnalul este localizată cu o rezoluție în frecvență mai bună decât în cazul descompunerii multirezoluție cu unde

amortizate [Figura 8 a)]. Adăugarea zgomotului în Figura 13 a) micșorează rezoluția și posibilitatea de detectare a structurilor semnalului.

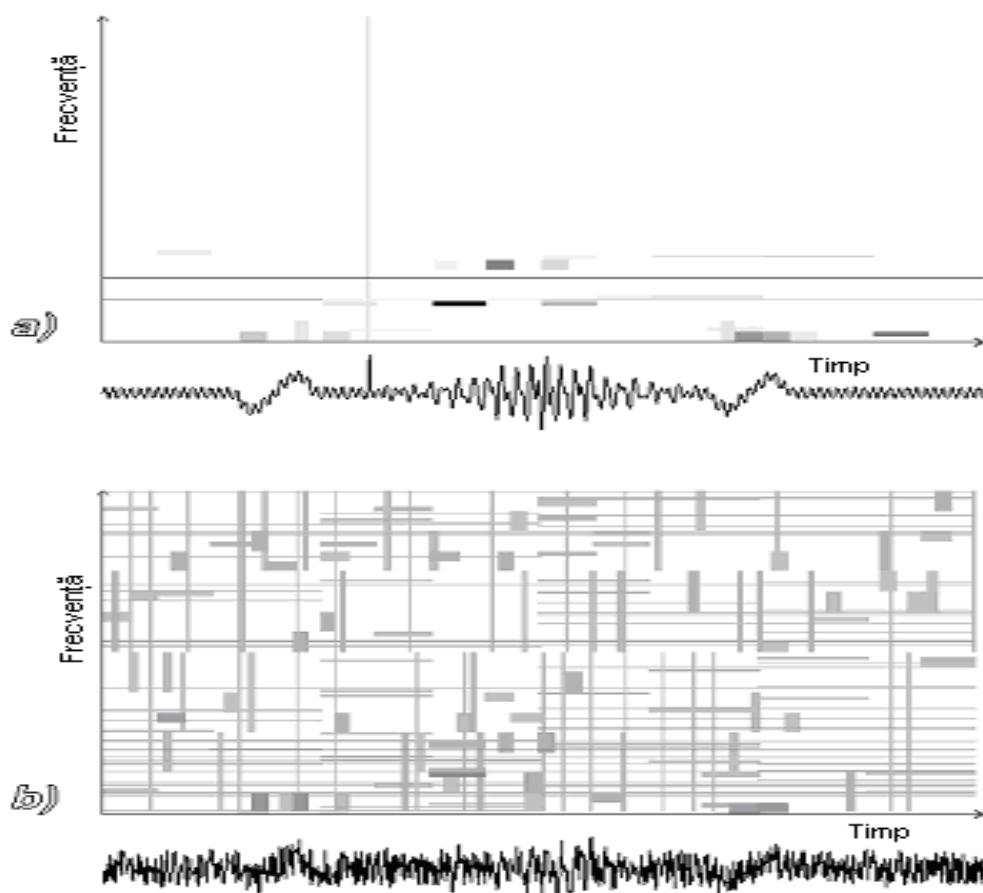
În ciuda avantajelor oferite de o bază ortonormală timp-frecvență, pachetele cu unde amortizate nu au fost alese în această lucrare în scopul analizării semnalelor tranzitorii EEG. Din acest punct de vedere, principalul dezavantaj rezultă din faptul că baza este adaptată global la întreaga epocă analizată. De aceea, reprezentarea semnalelor tranzitorii mai slabe poate varia în funcție de energia și morfologia altor structuri de semnal. Totuși, ortogonalitatea reprezentării poate deveni extrem de importantă, de exemplu, în investigarea funcțiilor inter-canal sau în cazurile care cer calcule rapide.

### 3.4. Rețele cu unde amortizate

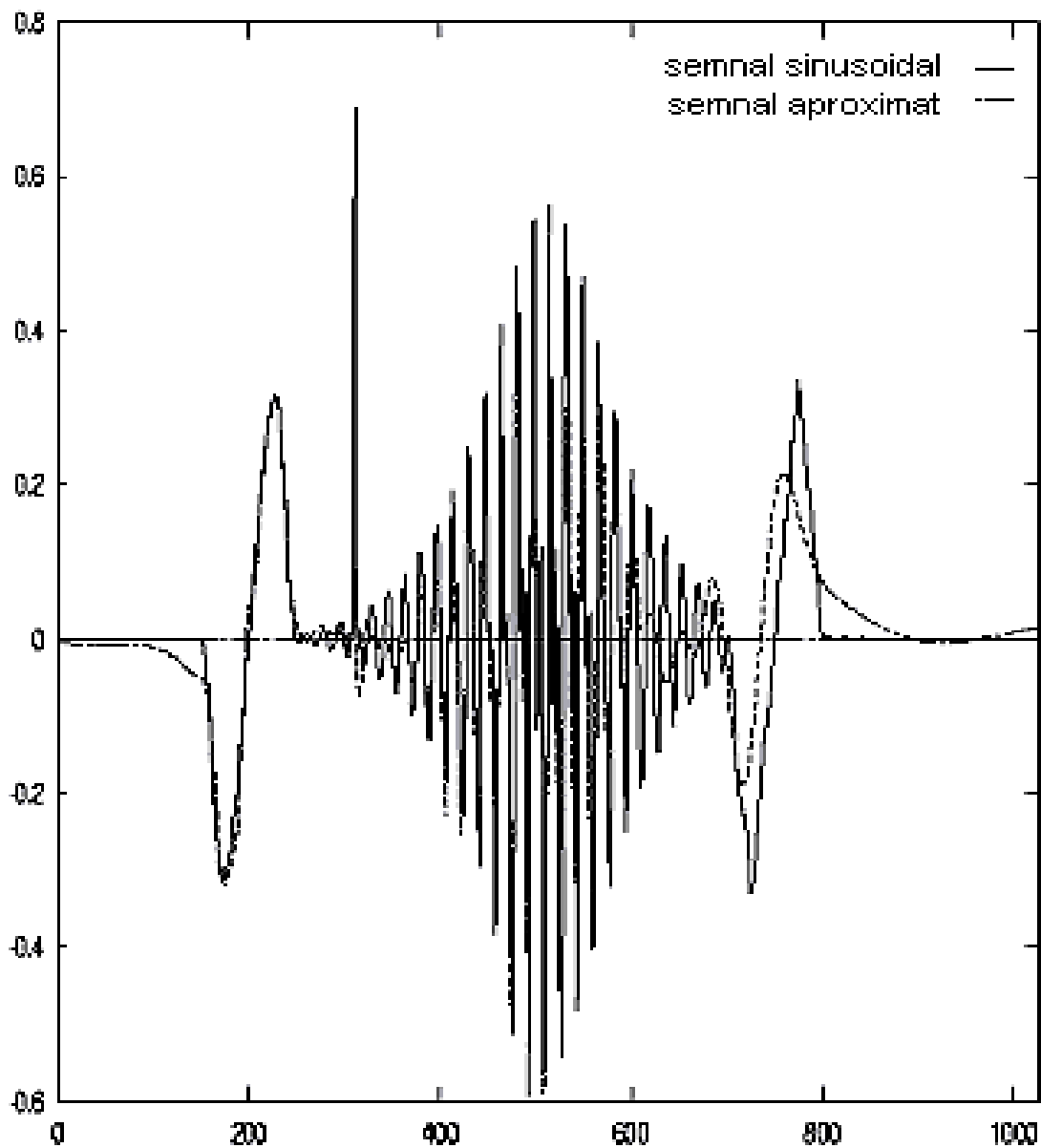
Denumirea de „rețele cu unde amortizate”, propusă de Zhang și Benveniste (1992), se referă la o rețea neurală cu reacție pozitivă cu un singur strat, unde funcțiile de prag ale neuronilor rețelei sunt înlocuite de unde amortizate, generate prin scalarea și translatarea unei singure funcții bază. Această aproximare poate duce la rezultate extrem de eficiente în anumite sarcini de aproximare a funcțiilor. Totuși, o alegere generală a parametrilor inițiali ai rețelei – numărul de „undaloni”, poziția și lățimea lor – încă rămâne o problemă deschisă. De aceea, reprezentarea depinde de aceste condiții inițiale, nefiind întotdeauna optime din punct de vedere al funcțiilor disponibile. De aceea, rețelele cu unde amortizate par să fie în stadiul unei dezvoltări premature pentru aplicații generale de prelucrare a semnalelor.

Figura 14 prezintă un exemplu de aproximare grosieră a unei funcții prin rețea cu unde amortizate, în care parametrii inițiali – cum ar fi numărul de „unde amortizate” – nu au fost aleși special pentru cazul studiat. Sunt arătate rezultatele a aproximativ 100 de „undaloni” și 50.000 de iterații. Funcția aproximată este semnalul TV din Figura 5, fără componenta sinusoidală, deoarece o aproximare rezonabilă a unei asemenea sinusoide necesită un număr mare de undaloni. Aproximarea grosieră prezentată în această imagine nu sugerează un comportament în general nehotărât al rețelelor cu unde amortizate. Alegerea corespunzătoare a setărilor inițiale, pentru anumite clase de semnale, conduce la aproximări mult mai bune. Un astfel de caz nu este arătat, deoarece cele două linii care reprezintă semnalul și aproximarea lui din Figura 14 ar fi confundate.

În ciuda capacității lor de adaptare, cercetarea rețelelor cu unde amortizate în această lucrare rămâne la stadiul de simulări. Folosirea lor la analizarea EEG ar necesita o setare arbitrară a condițiilor inițiale menționate mai sus.



**Figura 13** Descompunerea în pachete cu unde amortizate a semnalelor IV [a)] și [b)] din Figura 5



**Figura 14** Rezultatul aproximării [linia punctată] în 50.000 de iterații a semnalului simulat IV din Figura 5 fără componenta sinusoidală [linie plină] printr-o rețea cu 100 undaloni

### 3.5. Căutarea adaptării (Matching Pursuit) cu dicționar Gabor real discret

Înregistrările EEG care trebuie procesate numeric sunt serii reale și discrete în timp. Pentru analizarea acestor semnale trebuie construit un dicționar de atomi reali timp-frecvență, generați în concordanță cu ecuația (2.12) :

$$g_{(j, \phi)}(n) = K_{(j, \phi)} g_l(n-p) \cos(2\pi \frac{k}{N} n - \phi) \quad (3.4)$$

Indexul  $j=(j, k, p)$  este un analog discret al lui  $l=(\xi, s, u)$  din ecuația (2.12). Dacă presupunem că semnalul are  $N=2^L$  eșantioane, unde  $L$  este un număr întreg, atunci  $0 \leq j \leq L$ ,  $0 \leq p < N$  iar  $0 \leq k < N$ . Parametrii  $p$  și  $k$  sunt eșantionați cu un interval  $2^l$ . O astfel de alegere limitată a parametrilor, asemănător eșantionării duale a spațiului timp-frecvență în analiza multirezoluție cu unde amortizate, este un rezultat al compromisului dintre precizia reprezentării și complexitatea calculelor. Figura 18 arată rezultatul eșantionării spațiului frecvență-în octave dintr-un astfel de dicționar. De reținut că atomii cu interval mai lung în timp [octavă superioară] au eșantionare mai fină în domeniul frecvență.

Parametrul  $\phi$ , care în ecuația (2.12) era ascuns ca fază a unui număr complex, acum apare explicit. Valoarea lui  $K_{(j, \phi)}$  este astfel încât  $|g_{(j, \phi)}| = 1$ . Integrând această formulă [cu aproximare continuă] obținem :

$$K_{(j, \phi)} = \frac{2^{\frac{1}{l}}}{\sqrt{2^l e^{\frac{2k}{N}} \cos(\frac{4\pi kp}{N} 2\phi)}} \quad (3.5)$$

Mărimea acestui dicționar (și rezoluția descompunerii) poate fi crescută prin supraeșantionarea cu  $2^l$  ( $l > 0$ ) a parametrilor de timp și frecvență  $p$  și  $k$ . Dicționarul care rezultă are  $O(2^{2l} N \log_2 N)$  forme de undă, așa că complexitatea calculelor crește, ca și supraeșantionarea, de  $2^l$  ori. De asemenea, rezoluțiile în timp și frecvență cresc cu același factor.

$$\Delta t = 2^{-l} \frac{2^l}{f_m} \quad (3.6)$$

$$\Delta f = 2^{-l} \frac{f_m}{2^l} \quad (3.7)$$

unde  $f_m$  este frecvența de eșantionare a semnalului analizat.

Aici, rezoluția este înțeleasă ca distanța dintre centrele atomilor vecini în timp sau frecvență din dicționar. Ea depinde de octava  $j$ , care corespunde la „lățimea” unui atom în timp și frecvență. Abaterea în timp a atomilor dicționarului definește abilitatea noastră de a măsura lățimea în timp a structurilor semnalului reprezentată de acești atomi. Se poate defini „lățimea” unui atom timp-frecvență ca fiind jumătate din lățimea funcției fereastră  $g(n)$  :

$$T_{1/2} = 2 \frac{2^l}{f_m} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \quad (3.8)$$

Aceasta se schimbă cu fiecare octavă  $j$  cu un factor de 2, indiferent de supraeșantionarea descrisă mai sus.

Figura 15 a) arată reprezentarea grafică a funcției Wigner obținută din descompunerea MP a semnalului simulat  $IV$  din Figura 5, trasat în josul figurii. Se observă o reprezentare perfectă a sinusoidei, a funcției delta Dirac și a două funcții Gabor [F, E, C, D], care reprezintă forma de undă prezente în dicționar. Structurile A și B sunt reprezentate de grupe de atomi. Adăugarea zgomotului în Figura 15 b) nu modifică semnificativ rezoluția.

### 3.5.1. Amplitudinea unei funcții Gabor discrete

Mărimea  $\langle R^{nf}, g_{fn} \rangle$  [ecuația (2.15)] calculată prin algoritm pentru fiecare din atomii selectați este denumită *modul*. Ea reprezintă cantitatea din energia semnalului care este explicată printr-o formă de undă particulară. Totuși, în unele cazuri, avem nevoie de valoarea amplitudinii structurilor. Relația dintre modulul și amplitudinea funcției fereastră a unui atom din dicționarul Gabor – ecuația (3.4) – este dată de ecuația (3.5). Totuși, această formulă ne dă amplitudinea **funcției fereastră**.

Amplitudinea efectivă vârf-la-vârf a funcției Gabor corespunzătoare poate fi mai mică, funcție de frecvență, faza și parametrii de octavă ai acesteia. Figura 16 prezintă exemplul unor funcții Gabor din dicționarul construit dintr-un segment de 2048 de intervale. Amplitudinile funcției fereastră au fost normate la 1 [  $K_{j\tau\theta}$  ecuația 3.4] pentru toate formele de undă trasate grafic.

Diferența dintre amplitudinea funcției Gabor și amplitudinea funcției fereastră, introdusă prin eșantionare discretă, poate fi observată în Figura 16 g) și h), unde eșantionarea lipsește din extrema sinusoidei modulate. Pe graficele c) și d) din Figura 16, maximul oscilațiilor de joasă frecvență este departe de maximul funcției fereastră, având ca efect amplitudini ale funcției Gabor mai mici decât 1.

Figura 17 arată diferența relativă dintre dublul amplitudinii funcției fereastră  $g$ , din ecuația (3.4), și amplitudinea efectivă vârf-la-vârf a funcției discrete Gabor în spațiul frecvență-octavă. Calculele au fost efectuate pentru toate octavele și frecvențele atomilor care ar forma un dicționar Gabor discret complet, pentru un segment cu 2048 de intervale, mediat pentru peste 1099 de faze aleatoare. De reținut, că numai un subset de puncte din acest plan reprezintă atomii prezenți efectiv în dicționarul folosit în calcule – a se compara cu Figura 18.

Pentru acest dicționar există o implementare numerică mai rapidă prin metoda de căutare a adaptării, descrisă de Mallat și Zhang (1993). Ea a fost folosită în capitolul 4.3. pentru experimente numerice. Parametrul de supraeșantionare  $l$  a fost fixat la valoarea 3.

### 3.5.2. Numărul formelor de undă din dezvoltare

Alt aspect practic rezultă din faptul că, în mod normal, nu se calculează dezvoltări infinite ale termenilor din ecuația (2.18). Iterațiile trebuie oprite într-un punct anume.

Numărul formelor de undă din dezvoltare poate fi, de exemplu, stabilit printr-un procent din dispersia semnalului rezultată din descompunere sau fixat la o valoare anumită. Cu toate acestea, merită osteneala să aruncăm o privire la comportamentul reziduurilor semnalului la fiecare iterație.

Aproximarea MP este neliniară iar reziduurile, nu semnalul, sunt descompuse la fiecare etaj al procesului iterativ. Norma lor converge spre zero, după cum se arată în ecuația (2.17). Totuși, proprietățile asimptotice ale reziduurilor sunt cheia înțelegerii proprietăților de convergență ale MP. După cum s-a postulat în (Davis și colectivul 1994a) Căutarea Adaptării este o hartă haotică. Acest lucru

a fost dovedit pentru un tip particular de dicționar (Davis și colectivul 1994b) și a fost confirmat de experimente numerice. Dacă se renormalizează reziduurile la fiecare pas, pentru a preveni scăderea lor către zero, reziduurile renormalizate converg către realizările unui proces pe care îl denumim zgomotul dicționarului. Realizările zgomotului dicționarului sunt semnale pentru care produsele cu elementele dicționarului sunt uniform mici. Într-un anumit punct al procedurii iterative se ajunge la un stadiu în care un reziduu este o realizare a zgomotului dicționarului. Aceasta corespunde cu situația în care toate structurile coerente cu dicționarul, care dau relativ produse mari cu elementele dicționarului, au fost înlăturate în iterațiile anterioare.

Sau, cu alte cuvinte, un astfel de reziduu nu are nici o structură care ar putea fi coerentă în raport cu dicționarul. În practică, acest comportament al procedurii iterative poate fi exprimat printr-o magnitudine  $\lambda(n)$  – proporția din energia reziduuului  $R_n f$  exprimată prin  $g_{10}$ :

$$\lambda(n) = \frac{(R^n(f), g_I)}{I R^n(f) I} \quad (4.15)$$

$\lambda(n)$  converge către o valoare constantă în funcție de mărimea semnalului. Atingerea acestei valori corespunde situației prezentate mai sus, când distribuția produselor reziduurilor cu formele de undă ale dicționarului este plată. Figura 19 arată micșorarea lui  $\lambda$ , împreună cu energia reziduuului, supra numărul de iterații ale algoritmului.

Linia punctată arată procentul din energia totală a semnalului care este exprimată prin iterații consecutive. Această valoare corespunde lui  $\lambda(n)$ , dar la fiecare pas este normalizată față de energia totală a semnalului și nu față de energia reziduuului. Figura 19a arată aceste curbe pentru un segment EEG tipic, de lungime 2048 de intervale. Se poate observa în partea dreaptă a graficului, în regiunea unde curba  $\lambda$  devine plată, că este foarte puțină energie rămasă în reziduu. Aceasta indică faptul că dicționarul Gabor este, în general, coerent față de majoritatea structurilor semnalului. Figura 19b) arată același grafic pentru o epocă EMG [electromiogramă, care arată activitatea electrică a mușchilor] în cadrul aceluiași experiment, eșantionat, de asemenea, cu 102,4 Hz. Se observă că  $\lambda(n)$  devine plată foarte curând [după aproximativ 40 de iterații], în timp ce ambele curbe care rămân, procentajul absolut exprimat în funcție de iterația dată și energia reziduuului, scad foarte încet. Aceasta indică o coerență mică a acestui semnal față de dicționarul Gabor: adică după câteva iterații, în timp ce încă mai există o

dispersie importantă a semnalului care trebuie exprimată, distribuția produselor semnalului cu atomii dicționarului devine plată și nici o structură nu mai este, în particular, coerentă cu dicționarul. Harta Wigner pentru această epocă EMG este arătată în Figura 20. Una din cele mai coerente structuri este artefactul tensiunii de alimentare alternative la 50Hz. Un astfel de semnal cu conținut scăzut în informație poate fi rezultatul unei frecvențe de eșantionare prea mici pentru EMG, potrivită mai degrabă pentru canalele EEG, și din cauza înseși naturii semnalului EMG.

Figura 21 arată graficul Wigner al unui segment EEG tipic în cazul când *a)* 50, *b)* 100 și *c)* 200 de atomi au fost luați în considerare. El arată dezavantajele trasării distribuțiilor pentru prea mulți atomi. În Figura 21 *c)* vizibilitatea clară a structurilor principale EEG din *a)* și *b)* este deteriorată, în principal, de prezența structurilor legate de componentele zgomotului. În plus, 50 de atomi din *a)* exprimă aproape 95% din energie.

### 3.5.3. Procedee de realizare practică

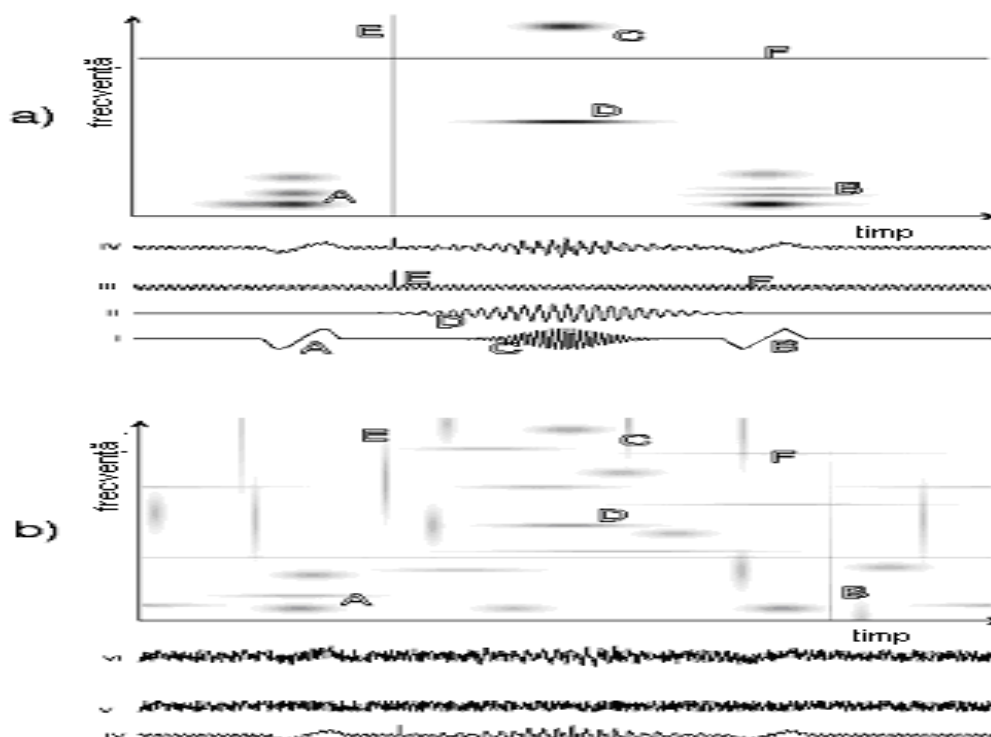
În descrierea pe scurt a algoritmului MP din paragraful 2.4 s-a spus că la fiecare pas al procedurii iterative un vector  $g_l$  este ales, astfel încât să dea cel mai mare produs cu reziduul  $R^{nf}$ :

$$| \langle R^{nf}, g_l \rangle | - \max_l | \langle R^{nf}, g_l \rangle | \quad (4.17)$$

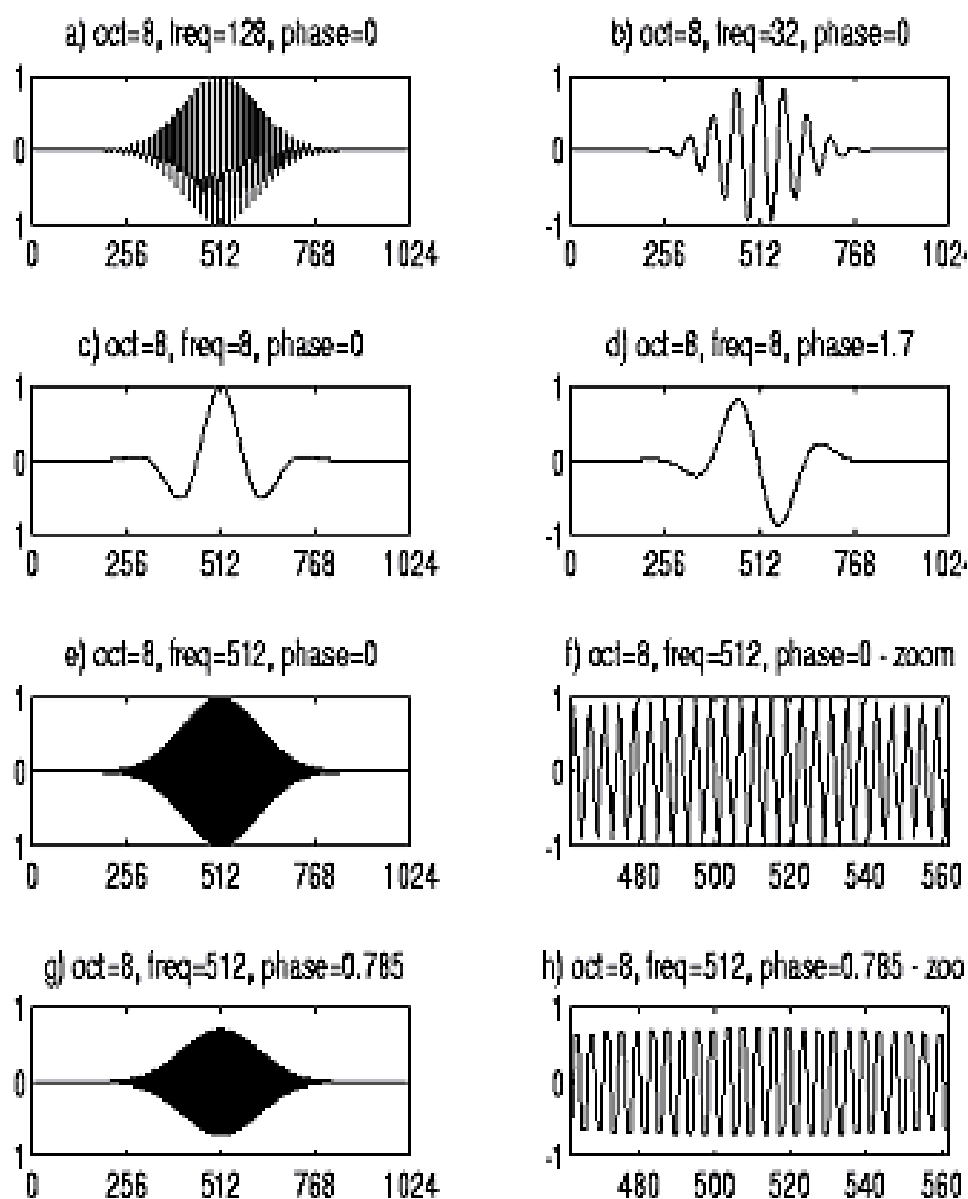
Într-adevăr, deoarece dicționarul construit pentru un semnal discret finit are un număr finit de forme de undă, această condiție este îndeplinită de cel puțin una din acestea. Totuși, în practică, alegerea celei mai bune forme de undă la fiecare etapă este bazată pe anumite procedee. O implementare directă a procedurii de alegere de mai sus, care este deja un compromis în favoarea unei complexități de calcul mai mici, ar necesita, încă, o cantitate enormă de resurse de calcul. Este suficient să considerăm, de exemplu, faza, continuă prin natura ei, prezentă explicit în atomii reali timp-frecvență din dicționarul Gabor. Eșantionarea rezonabilă a acestui parametru ar produce un dicționar uriaș chiar pentru dimensiuni relativ mici ale spațiului semnalului [egal cu numărul intervalelor din semnalul analizat]. De aceea, pentru a face algoritmul potrivit pentru aplicații practice, sunt implementate anumite procedee de optimizare a procedurii de alegere. Deoarece metoda, prin însăși natura ei,

furnizează o soluție sub-optimală, acest lucru nu este un dezavantaj major prin el însuși dacă procedeele alese dau rezultate rezonabile. Totuși, acest lucru trebuie avut în vedere dacă vrem să comparăm rezultatele obținute prin diverse implementări ale MP. Dacă optimizarea implementată diferă chiar cu puțin, diferențele se acumulează la fiecare iterație deoarece dezvoltarea nu este ortogonală.

Problema procedurii optim pentru MP este studiată în prezent. Rezultatele preliminare sugerează că s-ar putea obține o procedură de alegere care să îmbunătățească caracteristicile dorite ale semnalului, cum ar fi, de exemplu, morfologia EEG așa cum este percepută în analiza vizuală. Noi credem că această cercetare, împreună cu progresele în matematică și scăderea prețului tehnicii de calcul va face ca algoritmi bazați pe MP să devină o parametrizare, în general, acceptabilă pentru semnale biomedicale.

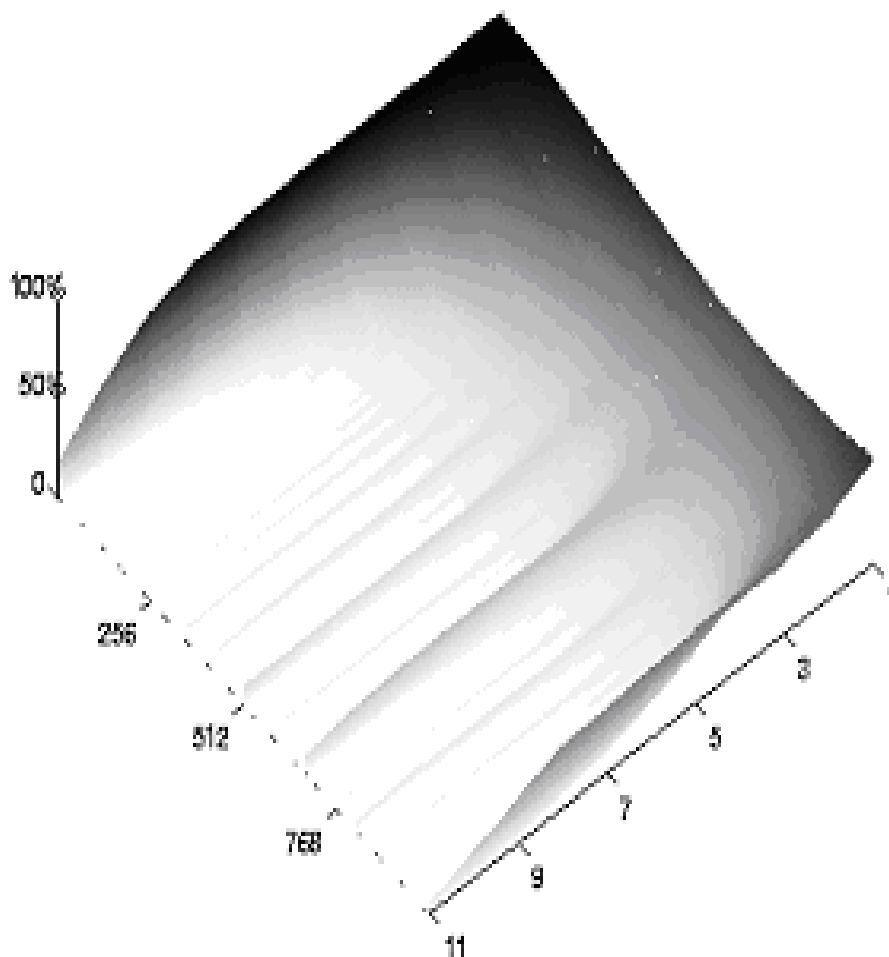


**Figura 15** Curbele Wigner obținute cu ajutorul MP, pentru semnalele arătate mai jos [a se compara cu Figura 5]. Literele indică structurile semnalului și atomii sau grupurile de atomi corespunzători

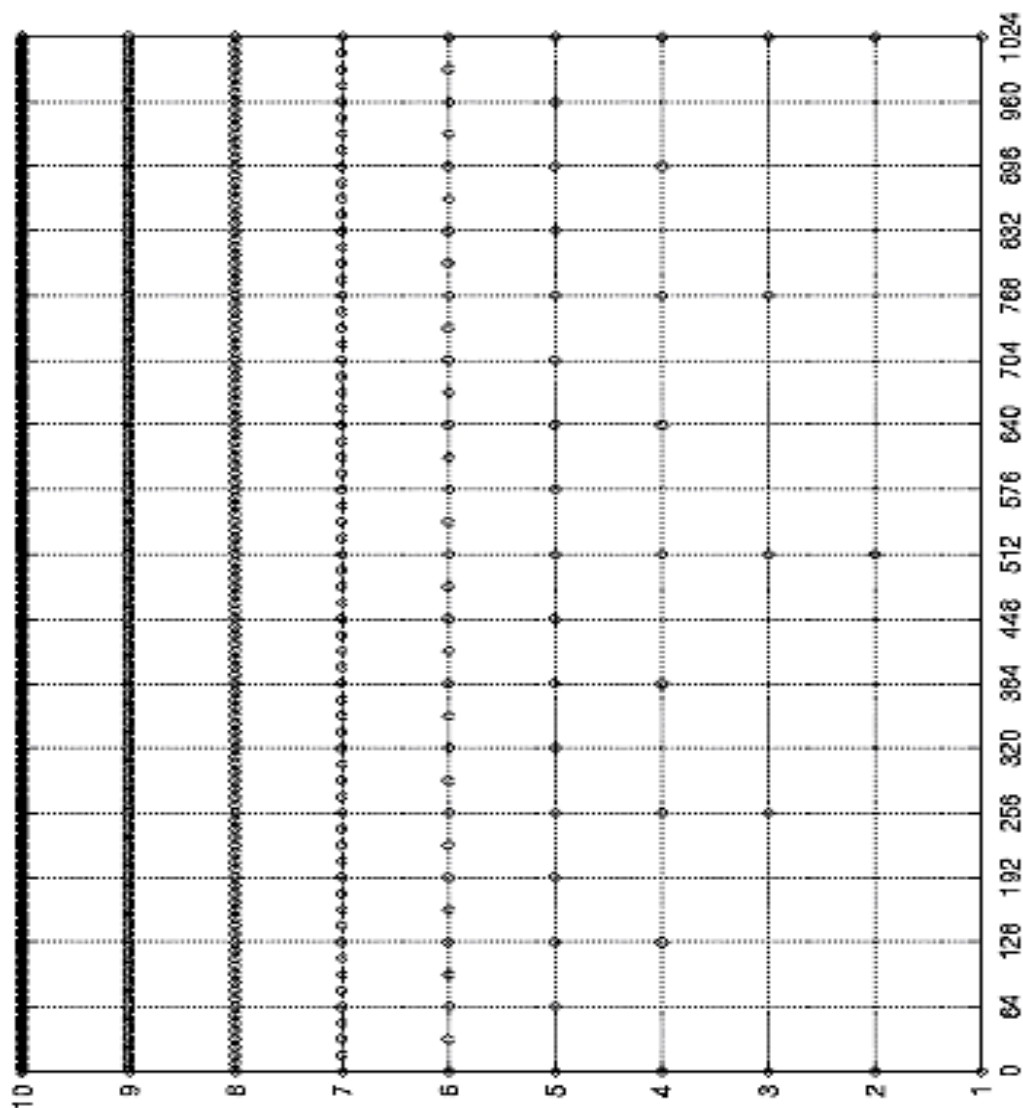


**Figura 16** Exemple de funcții Gabor dintr-un dicționar construit pentru un segment de 2048 intervale. Amplitudinea funcției fereastră [  $K_{(t, \theta)}$  ecuația (3.4)] este normalată la 1

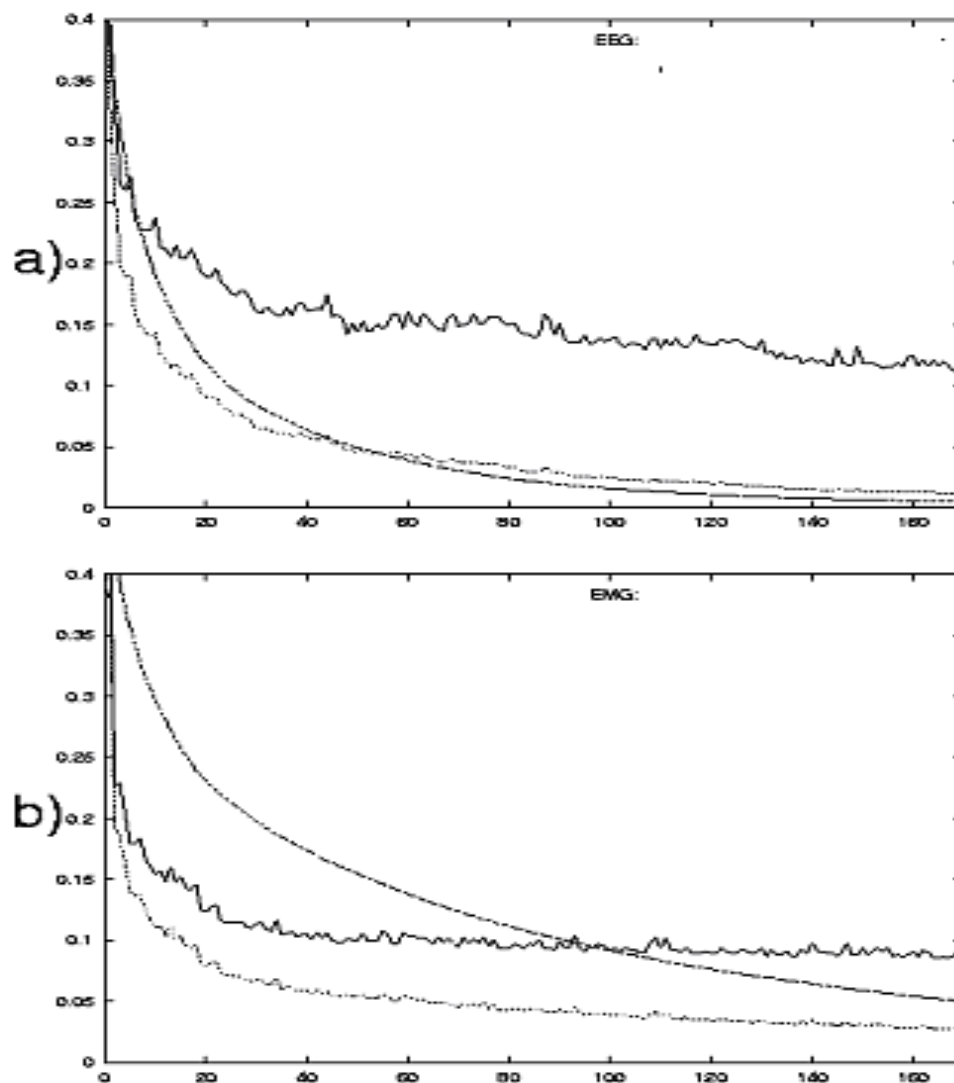
$(2-\max+\min)/2$ , mediat peste 1099 de faze aleatoare în funcțiile Gabor



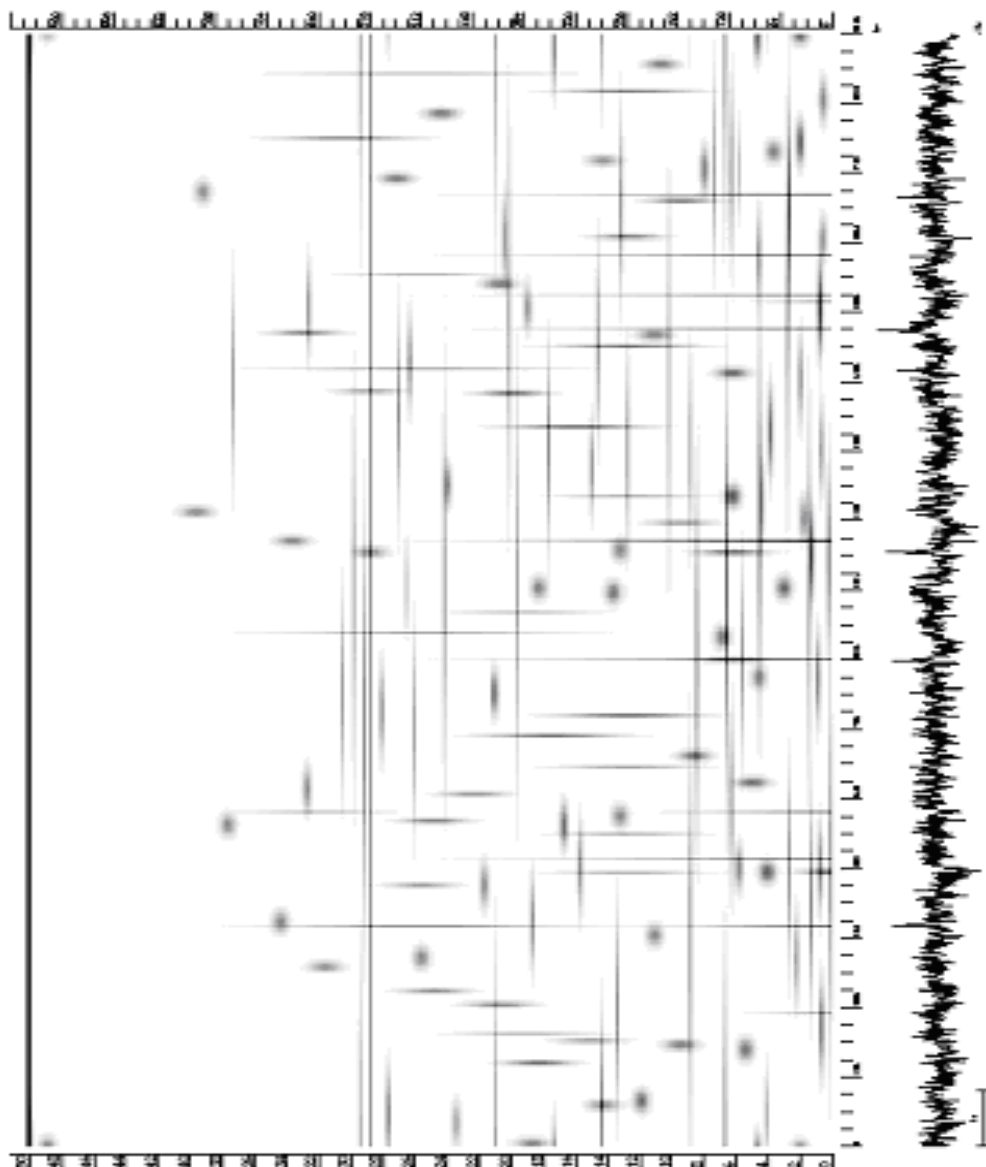
**Figura 17** Diferența relativă dintre amplitudinea [dublată] funcției fereastră și amplitudinea instantanee vârf-la-vârf a funcției Gabor. Pe axa dreaptă – octavele [1-11], pe axa stângă – frecvența în unități generale



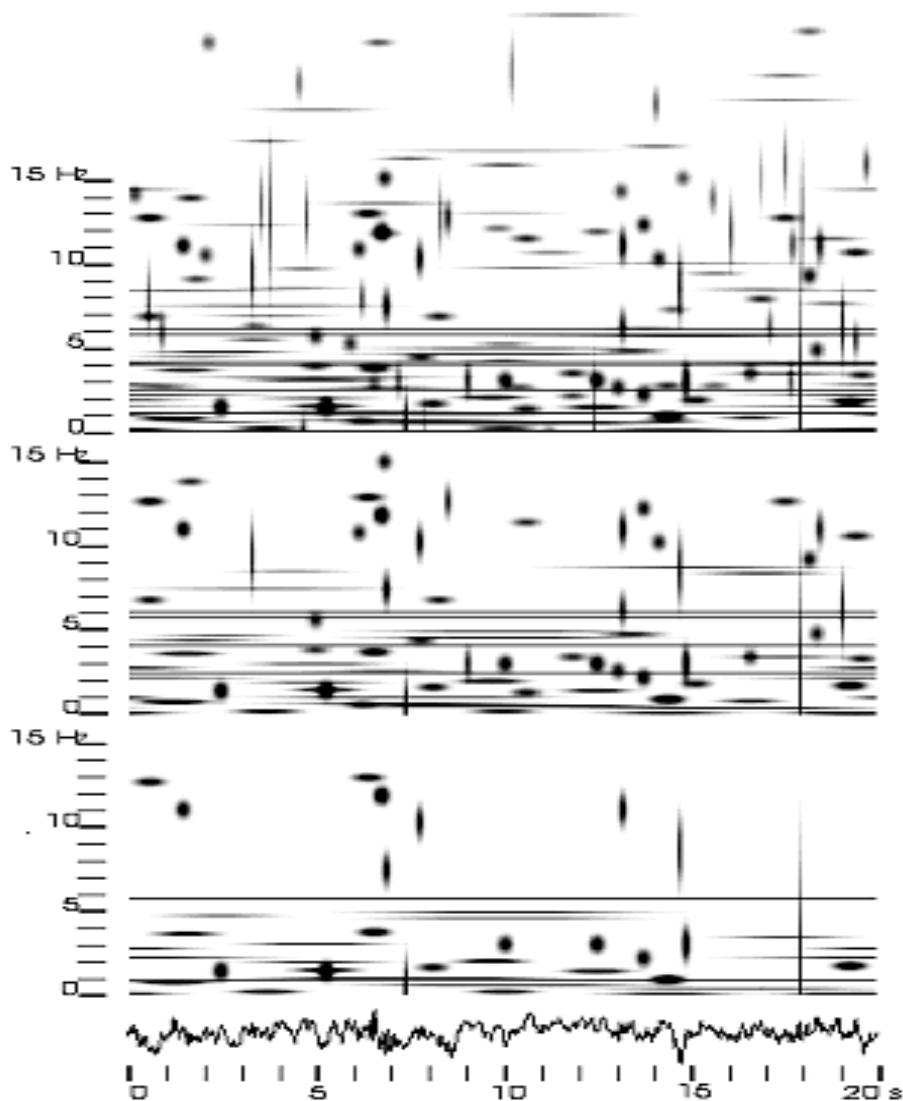
**Figura 18** Eșantionarea spațiului frecvență [pe axa orizontală, 0-1024] – octave [pe axa verticală, 1-10] în limita dicționarului Gabor discutat în capitolul 3.5.



**Figura 19**  $\lambda$  [ecuația (4.15), linie groasă] și energiile: care rămân în reziduu [cu liniuțe] și exprimate în iterație [cu linie punctată] față de energia semnalului, supra numărul de iterații; a) EEG; b) EMG



**Figura 20** Curba Wigner pentru semnal EMG, pentru care scăderea lui  $\lambda$  a fost trasată grafic în Figura 19b



**Figura 21** Curba Wigner pentru o undă EEG lungă de 20s [la baza graficelor] în cazurile când au fost luați în considerare : a) 50, b) 100 și c) 200 atomi (iterații)

## Capitolul 4

### Rezultate și discuții

**Exemplele date în acest capitol pot servi ca bază metodologică pentru o clasă largă de probleme întâlnite în prelucrarea semnalului biomedical de tip EEG.**

#### 4.1. Studiul potențialelor evocate

Potențialele evocate (P300) sunt semnale cu un ordin de mărime mai mici decât EEG-ul fundamental iar forma lor este găsită prin medierea probelor declanșate cu un stimul repetat. Corectitudinea aproximării prin mediere se bazează pe presupunerea independenței ambelor semnale (lucru neadevărat), repetabilitatea EP și caracterul pur stohastic al EEG. Aplicarea WT face posibilă depășirea dificultăților legate de procedura de mediere. În lucrarea (Bartnik și Blinowska, 2002) descompunerea multire-zoluție a fost aplicată potențialelor evocate auditive singulare și epocilor EEG-ului fundamental. În spațiul coeficienților de unde amortizate s-a realizat o analiză statistică pentru a găsi diferențele dintre înregistrările EEG și cele ale EP. S-a descoperit că nivelul de încredere al discriminării  $10^6$  se poate obține pentru numai cinci coeficienți de unde amortizate.

În lucrarea (Bartnik, Blinowska și Durka, 2000) s-au realizat reconstrucțiile potențialelor evocate singulare din coeficienții de unde amortizate. Figura 22 prezintă reconstrucția primelor zece probe singulare din coeficienții de unde amortizate care deosebesc EEG de EP. Deasupra fiecărei probe consecutive [linie plină, în partea de jos] este desenată reconstrucția ei [linie plină, mai subțire] pe fondul unei medii a tuturor celor 55 de probe singulare, de lungime 512ms fiecare [linie punctată]. Se poate observa o similaritate mai bună sau mai proastă a acestor reconstrucții față de medie, în funcție de probă. De asemenea, există cel puțin un caz când se pare că răspunsul nu a apărut.

##### 4.1.1. Investigarea influenței leziunilor cerebrale

Au fost înregistrate potențiale evocate somatosenzoriale [SEP, extrase prin stimularea electrică a labei de pisică] cu ajutorul unor electrozi cu bilă de argint poziționați pe cortexul pericrucial al pisicii

anesteziate. Înregistrările au fost efectuate înainte și după înlăturarea unei părți a cerebelului. Au fost înregistrate EEG spontane și 92 de repetiții ale SEP din 8 derivații : F7, F3, C3, P3, O1, F8, F4, C4, P4, O2. Înregistrările rezultate în urma experimentelor au fost împărțite în patru cazuri : potențiale evocate înainte de leziune, EEG spontane înainte de leziune, potențiale evocate după leziune și EEG spontane după leziune. Parametrizarea cu unde amortizate a fost calculată pentru fiecare din cele 92 de segmente ce reprezintă fiecare caz din cele patru menționate mai sus. A fost aplicat testul Mann-Whitney în spațiul coeficienților de unde amortizate deja calculați. Diferențele presupuse între fiecare pereche de cazuri menționate anterior, au fost testate separat pentru fiecare din coeficienții de unde amortizate.

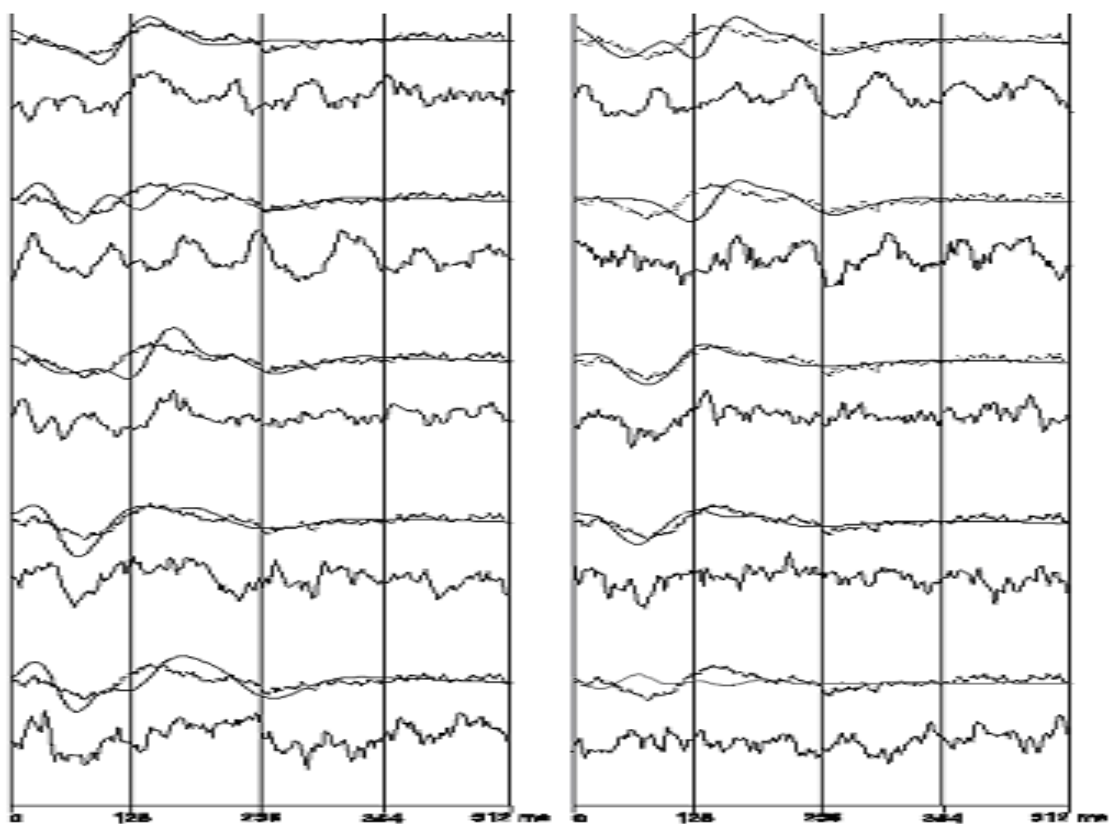
Figura 23 prezintă schema coeficienților de unde amortizate pentru care diferențele presupuse au un nivel de încredere de 0,01. Dreptunghiurile umbrite (ușor decalate către stânga sus) indică coeficienții de unde amortizate care deosebesc EP de EEG. Dreptunghiurile negre [dreapta mai jos] indică diferențele dintre EP-urile de înainte și după leziune. Dreptunghiurile goale înseamnă că nu există diferențe semnificative.

Investigarea în profunzime a mai multor desene corespunzătoare Figurii 23 ne permite să facem următoarele observații :

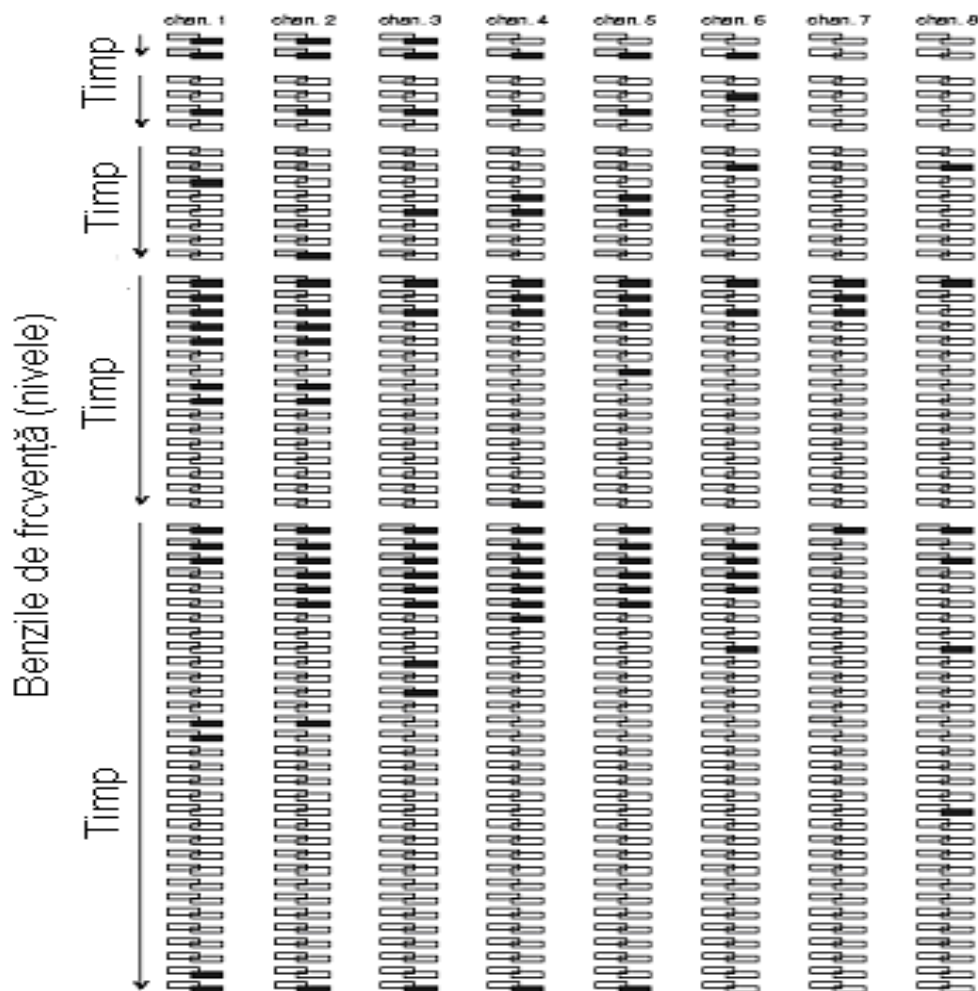
1. Diferențele dintre potențialele evocate și activitatea spontană, evidențiate în înregistrările de înainte și după leziune, sunt similare cu rezultatele descrise în lucrarea (Bartnik și Blinowska, 1992). Cea mai bună discriminare a fost pentru componentele timpurii de pe scalele  $(s) 2^2$ ,  $2^3$  și  $2^4$  corespunzătoare benzilor de frecvență : 250-125 Hz, 125-62 Hz și respectiv 62-31 Hz. Diferențele statistice între înregistrările pure EEG și SEP au clarificat influența stimulilor în SEP. Reconstrucțiile probelor singulare din acești coeficienți au forme față de medie analog situației din Figura 22.
2. Înregistrările SEP înainte și după leziune au fost, în general, cel mai bine discriminate, prin aceiași coeficienți de unde amortizate ca aceia care deosebesc SEP de EEG (înainte și după leziune). Acest efect este prezentat în Figura 23 pentru primii opt electrozi.
3. Nu au fost găsite diferențe statistice în înregistrările EEG spontane înainte și după leziune.

Din această analiză rezultă că activitatea creierului schimbată de leziune a fost în principal activitate evocată, în timp ce EEG-ul spontan înainte și după leziune nu a arătat diferențe statistice. Aceasta este legată, de asemenea, de activitatea spontană prezentă pe fondul segmentelor potențialelor evocate. Diferențele introduse de leziune în aceste înregistrări au fost localizate în aceleași regiuni timp-frecvență ca diferențele dintre potențialele evocate și EEG-ul spontan, fapt care sugerează că numai activitatea influențată de leziune a fost activitate evocată, în timp ce EEG-ul spontan rămâne neschimbat.

Transformata cu unde amortizate oferă descrierea potențialelor evocate în termeni de coeficienți care reflectă caracteristicile lor morfologice. Schimbările introduse de leziune au fost detectate în spațiul timp-frecvență fără nici o presupunere anterioară referitoare la proprietăților semnalelor.



**Figura 22** Reconstrucțiile potențialelor evocate singulare din cinci coeficienți care să deosebească SEP de EEG-ul curent. Jos – înregistrarea brută, sus cu linie plină – EP-ul reconstruit, cu linie punctată – media pentru 55 de prob



**Figura 23** Rezultatele discriminării dintre SEP și EEG în spațiul coeficienților de unde amortizate

## 4.2. Detectarea artefactelor EEG utilizand o rețea neuronală artificială

Când se folosește o rețea neurală artificială (ANN, par. 2.3.) pentru clasificarea segmentelor din înregistrările EEG, apare problema alegerii optime a preprocesării seriilor numerice înainte de alimentarea intrării de la primul nivel. Transformata ortogonală cu unde amortizate este un candidat bun pentru a fi folosit pentru preprocesare din cauza implementării rapide  $[O(N)]$  și a corespondenței coeficienților de unde amortizate cu conținutul energetic timp-frecvență.

Au fost testate patru rețele neurale artificiale din punct de vedere al performanțelor de clasificare, pentru segmente de înregistrări EEG multicanal cu o lungime de 2,5 s. Fiecare din segmente a fost supus unei decizii binare a unui expert : este artefact sau nu este artefact. Artefactele au fost marcate în scopul analizării ulterioare. Canalele polisomnografice standard (21 de canale EEG, în concordanță cu standardul 10-20 și derivatele sale A1 și A2) au fost eșantionate cu frecvența 102,4 Hz cu ajutorul unui convertor analog-digital cu 12 biți. Au rezultat 8 ore și 38 de minute de înregistrări, reprezentând 12440 segmente de 2,5 s. Setul de învățare a constatat din segmentele impare [6220], 2060 din acestea fiind clasificate drept artefacte. În setul de testare [segmentele pare] 2058 de segmente conțineau artefacte.

Învățarea rețelei prin propagare inversă a fost repetată până când testele realizate pe un subset din setul de învățare nu au arătat nici o îmbunătățire.

#### 4.2.1. Rețele testate

Au fost testate patru scheme diferite de preprocesare. Arhitecturile rețelelor au fost adaptate la schema de preprocesare :

- A. În prima aproximare au fost folosite ca intrare segmente neprelucrate din seriile în timp ale EEG. Fiecare din neuronii de pe al doilea nivel au recepționat intrare de la 7 eșantioane învecinate, cu fereastra mutată cu un interval la următorul neuron. Au rezultat 250 neuroni pentru fiecare segment de 2,5 s (256 de intervale), iar pentru 27 de canale, un total de 6750 de neuroni pe primul nivel. 27 de neuroni din nivelul al treilea au recepționat intrare de la toți neuronii de pe nivelele precedente. Un singur neuron de ieșire a colectat intrările de la toate unitățile de pe al doilea nivel.
- B. În construirea preprocesării pentru a doua rețea, a fost adăugată o anumită cantitate de cunoștințe *a priori* despre natura artefactelor. Corelațiile dintre electrooculogramă și canalele EEG [denumite EOG1/EOG2, EOG1/Fp1, EOG1/Fp2] au fost calculate pentru a facilita detectarea artefactelor oculare. Restul de 45 de valori de intrare au constatat din medii și variații calculate pentru fiecare canal separat.

- C. Coeficienții neprelucrați de unde amortizate ai datelor fiecărui canal au constituit intrarea în cazul rețelei a treia. Următorul nivel a constat din două subnivele. 27 de unități de pe primul subnivel a recepționat suma ponderată a tuturor coeficienților de unde amortizate din înregistrările separate ale canalelor. Fiecare din cele 256 de unități ale subnivelului al doilea au recepționat un singur coeficient de unde amortizate (corespunzând unei anumite regiuni timp-frecvență) de la toate cele 27 de canale. Primul subnivel a fost introdus pentru a facilita evoluția rețelei către detectarea artefactelor vizibile în canale separate, cum ar fi, de exemplu, decalajul liniei de referință. Al doilea subnivel a adunat dependențele inter-canal fără a pierde informația timp-frecvență conținută în coeficienții de unde amortizate.
- D. Bazați pe formula (3.3) din paragraful 3.2.4., au fost calculate corelațiile din banda de joasă frecvență (0,4 – 3,2 Hz) între electrooculograma EOG1 și derivata Fp1 a EEG precum și între electrooculogramele pentru ochiul drept și stâng EOG1 și EOG2. Ne-am așteptat ca raportul lor să reflecte propagarea electrooculogramei spre canalul Fp1 al EEG. Au fost calculați parametri similari pentru derivatele Fp2, F7 și F8, care sunt în mod obișnuit cele mai contaminate cu acest tip de artefacte. Datorită calculării corelației la joasă frecvență, acest parametru nu a fost afectat de propagarea EEG în electrooculogramă.

Pentru fiecare din canalele EEG puterea din banda de frecvență 25,6 – 51,2 Hz normalizată față de puterea totală a reflectat artefactele de înaltă frecvență (de exemplu, mușchi). Parametrul similar din banda de frecvență 0 – 0,8 Hz a reflectat artefactele de joasă frecvență, legate în principal de respirație. Toți acești parametri au fost calculați eficient din descompunerea ortogonală cu unde amortizate.

Mărimea totală a nivelului de intrare a fost de 46. 20 de unități de pe al doilea nivel și șase unități de pe al treilea nivel au fost conectate la fiecare neuron de pe nivelele precedente. Ca și în celelalte cazuri descrise anterior, o singură unitate de ieșire a fost conectată la toate unitățile nivelului precedent.

#### 4.2.2. Analiza rezultatelor

Figura 24 prezintă răspunsurile celor patru rețele neurale descrise anterior [A, B, C, D] la seturile de învățare [A1, B1, C1, D1] și la seturile de testare [A2, B2, C2, D2] descrise mai sus. Învățarea a fost realizată pentru valorile : 1 = artefact, 0 = non-artefact. Dreptunghiurile de la abscisa 0 și 1 reprezintă decizia expertului – respectiv numărul de artefacte și de non-artefacte. Situația ideală a fost reprezentată printr-un grafic cu o zonă umbrită corespunzător numărului de cazuri de non-artefacte concentrat pe abscisa 0, cu înălțimea egală cu înălțimea dreptunghiului stâng. Similar, zona punctată pentru a indica cazurile cu artefact ar trebui concentrată pe abscisa 1 și cu o înălțime egală cu dreptunghiul drept. Se poate observa că o mare parte din răspunsuri se încheie la 0,4 pentru rețeaua D, pentru ambele seturi de date, de învățare și de testare. Aceasta corespunde unei clase de semnale cu care rețeaua “nu știe ce să facă”.

Pentru a converti ieșirea rețelei (reprezentată de valori continue în gama de la 0 la 1) la valori binare, se fixează un prag de decizie. Valorile sub prag se consideră 0, iar cele peste prag se consideră 1. După o asemenea cuantizare avem patru căi posibile de a clasifica răspunsul rețelei :

| Rețea \ expert | 0         | 1         |
|----------------|-----------|-----------|
| 0              | <i>TN</i> | <i>FP</i> |
| 1              | <i>FN</i> | <i>TP</i> |

Alegerea valorii pragului influențează performanța rețelei în ceea ce privește recunoașterea epocilor cu artefacte și non-artefacte. Performanța poate fi măsurată prin probabilitatea de clasificare optimă, adică probabilitatea ca o epocă marcată de expert ca fiind artefact să fie clasificată la fel de către rețea. Se poate defini detectabilitatea epocilor cu artefacte ca fiind  $TP/(TP+FP)$  iar detectabilitatea epocilor cu non-artefacte ca fiind  $TN/(TN+FN)$ . Alt parametru, reflectând probabilitatea ca segmentul clasificat de rețea ca fiind artefact să fie într-adevăr marcat așa de către expert, se poate denumi selectivitate. Selectivitatea rețelei față de epocile cu artefacte va fi dată de  $TP/(TP+FN)$  iar față de epocile cu non-artefacte va fi dată de  $TN/(TN+FP)$ .

Tabelul de mai jos prezintă performanțele celor patru rețele pe un set de date de testare, pentru o alegere optimă a pragului:

|                 |                            | A         | B         | C          | D         |
|-----------------|----------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|
| prag            |                            | 0,4 – 0,9 | 0,1 – 0,2 | 0,1 – 0,9  | 0,1 – 0,3 |
| detectabilitate | artefacte $TP/(TP+FP)$     | 0,9       | 0,7       | 0,3 – 0,4  | 0,7       |
|                 | non-artefacte $TN/(TN+FN)$ | 0,2 – 0,3 | 0,8       | 30,7 – 0,8 | 0,7       |
| selectivitate   | artefacte $TP/(TP+FN)$     | 0,35      | 0,7       | 0,4        | 0,5       |
|                 | non-artefacte $TN/(TN+FP)$ | 0,7       | 0,85      | 0,7        | 0,8       |

Rețelele A și C arată performanțe nesatisfăcătoare pentru setul de testare, deși pe setul de învățare ele au învățat să se comporte bine. Rețelele B și D arată performanțe similare pe setul de testare și pe setul de învățare, lucru care dovedește că au proprietăți bune de generalizare. Următorul tabel rezumă rezultatele de mai sus :

|   | Preprocesarea intrării                                            | Mărimea Intrării | Convergența (iterații) | Generalizare |
|---|-------------------------------------------------------------------|------------------|------------------------|--------------|
| A | Semnal brut                                                       | 6750             | $18 \cdot 10^6$        | Mică         |
| B | Corelații, variații și medii                                      | 45               | $22 \cdot 10^6$        | Bună         |
| C | Coeficienți bruți de unde amortizate                              | 6912             | $2 \cdot 10^6$         | Mică         |
| D | Corelații și puteri delimitate în bandă bazate pe unde amortizate | 46               | $2,1 \cdot 10^6$       | bună         |

### 4.2.3. Concluzii

1. Rețelele neuronale cu un număr mic de intrări permit generalizare mai bună.
2. Utilizarea coeficienților bruți de unde amortizate ca intrare, au crescut viteza de învățare cu un ordin de mărime față de semnalul brut. Aceasta demonstrează relevanța informației morfologice conținută de coeficienții de unde amortizate.
3. Descompunerea ortogonală cu unde amortizate (wavelet) permite, pentru un calcul eficient, o prelucrare mult mai complexă [ex. corelațiile cu bandă limitată în locul corelațiilor totale] păstrând un nivel acceptat pentru resursele de calcul.

## 4.3. Detectarea vârfurilor din timpul somnului și analizarea acestora pe baza parametrizării cu Căutarea Adaptării

Vârfurile din timpul somnului joacă un rol major în analiza activității cerebrale în somn. Impulsuri spontane de activitate ritmică în banda 12 → 14 Hz, pe fondul EEG-ului unui subiect în somn ușor, au fost observate pentru prima oară în anul 1935 de Loomis și alții, care încă de la început le-au denumit drept „vârfuri”.

Mai târziu, termenii *unde sigma* sau *activitate sigma* au fost recomandați de Federația Internațională pentru Electroencefalografie și Neurofiziologie Clinică [IFSECN] în anul 1961, dar utilizarea acestora a fost descurajată de IFSECN în anul 1974. În „Glosarul de termeni utilizați în mod obișnuit în electroencefalografiile clinice” [IFSECN 1974] vârfurile sunt definite drept „un grup de unde ritmice caracterizate de amplitudine cu creștere progresivă și, apoi, cu scădere graduală”

Definiția dată în (Rechtschaffen și Kales 1968) spune „prezența vârfului în timpul somnului nu trebuie definită dacă nu are o durată de cel puțin 0,5s, adică să fii capabil să numeri 6 sau 7 unde distincte într-o perioadă de jumătate de secundă. (...) Termenul trebuie folosit numai pentru a descrie activitatea dintre 12 și 14 cicli/secundă”. În (Dutertre 1977) găsim, de asemenea, că „unde vârf sunt monomorfe, disfazice și simetrice față de linia de bază. Frecvența este stabilă în banda 12 → 14 Hz. Durata întregului vârf este de variabilă, între 1 și 6 secunde”.

Jankel și Niedermayer (1985) discută, de asemenea, aspectul controversat al existenței vârfurilor cu frecvența în jurul valorii de 10 Hz. Această problemă nu este tratată în această lucrare.

Vârfurile din timpul somnului arată variații în funcție de morfologia, frecvența și distribuția spațială a undei, precum și în funcție de etajul somnului. Aspectul vârfurilor variază în funcție de vârstă și anumite tulburări ale sistemului nervos central. Descrierea lor precisă este importantă în studiul insomniei, depresiei, îmbătrânirii, efectelor drogurilor, distoniei (de răsucire ???) și evaluarea efectelor benzodiazepinelor (Trenker și Rappelsberger 1996).

Finalmente, o clarificare terminologică mai mare este dată de Jankel și Niedermayer (1985) : „Vârful din timpul somnului al unui electroencefalograf [înregistrat la pacienți sau subiecți bolnavi] trebuie distinse cu grijă de vârfurile discutate de neurofiziologi. Acestea sunt vârfuri înregistrate în experimente cu animale drogate cu barbiturice și au servit ca model pentru înțelegerea genezei ritmurilor EEG fiziologice, cum ar fi ritmul alfa [vezi (Andersen 1966)]”.

#### 4.3.1. Date experimentale

|           |            |            |            |           |
|-----------|------------|------------|------------|-----------|
|           | <b>Fp1</b> | <b>Fpz</b> | <b>Fp2</b> |           |
| <b>F7</b> | <b>F3</b>  | <b>Fz</b>  | <b>F4</b>  | <b>F8</b> |
| <b>T3</b> | <b>C3</b>  | <b>Cz</b>  | <b>C4</b>  | <b>T4</b> |
| <b>T5</b> | <b>P3</b>  | <b>Pz</b>  | <b>P4</b>  | <b>T6</b> |
|           | <b>O1</b>  | <b>Oz</b>  | <b>O2</b>  |           |

**Tabelul 1** Reprezentarea schematică a poziției electrozilor conform sistemului “10-20”.  
Partea frontală a capului este în susul paginii.

Înregistrările nocturne pentru EEG-ul din timpul somnului au fost furnizate de profesorul Waldemar Szelenberger de la Școala Medicală din Varșovia, Departamentul de Psihiatrie. Au fost înregistrate canalele polisomnografice standard, 21 de canale conform standardului „10-20”, precum și derivatele A1 și A2. Electrozii de argint au fost aplicați cu colodiu. Rezistența maximă acceptabilă a fost sub 5 KΩ. S-a folosit un convertor analog-digital cu 12 biți iar rata de conversie a fost 102,4 Hz.

Rezultatele descrise mai jos au fost obținute din înregistrările din două nopți, pe voluntari bolnavi, uzual 7 ore de EEG înregistrate pe aparatul EEG Medelec. Au fost realizate analize numerice și vizuale a semnalelor de referință provenite de la electrozii A1 și A2.

Segmente cu lungimea de 20s [2048 de intervale] au fost descompuse MP cu 100 de iterații pe segment. Deși în cele mai multe cazuri algoritmul a găsit structuri coerente [paragraful 2.4., pagina 38]

de asemenea dincolo de această etapă, ele erau atomi de foarte mică amplitudine care erau departe de pragul detectabilității. Chiar cu aceste limitări, descompunerea celor 21 de canale de înregistrări nocturne a luat aprox. 8 zile de calcule pe o stație de lucru IBM RS/8000 320H.

### 4.3.2. Alegerea vârfurilor din atomii timp-frecvență

Forma de bază a formelor de undă din dicționarul Gabor [paragraful 3.5.] corespunde bine cu forma descrisă în definițiile vârfurilor din timpul somnului [la începutul capitolului 4.3.]. De aceea, fiecare din vârfuri trebuie reprezentat de un atom timp-frecvență din acest dicționar. Totuși, în (Jankel și Niedermayer 1985) suntem avertizați :

*„Se pare că este clar faptul că termenul „vârf” presupune o burtă în mijloc și o descreștere spre dreapta și stânga. Această formă a vârfurilor, totuși, este excepția mai degrabă decât regula. Un tren de unde alfa se aseamănă mai mult cu forma crescendo-decrescendo a vârfului. Astfel, termenul de „vârf” este greșit atât timp cât vârfurile din timpul somnului sunt implicate. Totuși, este un termen atât de „simpatic” și de uzitat încât nu se poate face o schimbare terminologică”.*

Cu toate acestea, cum am mai spus, dicționarul Gabor a fost ales datorită localizării optime timp-frecvență a funcțiilor Gabor iar aplicarea lui nu este limitată doar la structurile gen vârf.

Sarcina principală este de a alege din formele de undă potrivite pentru structurile segmentului analizat corespunzătoare vârfurilor din timpul somnului. O astfel de procedură va opera în spațiul parametrilor atomilor potriviți: timp, frecvență, octavă, modul și fază [ecuația (3.4), paragraful 3.5.].

#### 4.3.2.1. Parametri relevanți

**Frecvența.** Rechtschaffen și Kales (1968) au definit gama de frecvență a vârfurilor ca fiind între 12 și 14 Hz. În lucrările mai noi, această gamă este extinsă cu 1 Hz în sus și în jos (11 → 15 Hz). Jankel și Niedermayer (1985) au declarat explicit că „Nu există nici o îndoială (...) că gama 12 → 14 Hz este prea îngustă”. În această lucrare, gama de frecvență pentru o structură pentru a fi considerată un vârf din timpul somnului a fost stabilită la 11 → 15 Hz.

**O octavă** corespunde lățimii în timp a formei de undă [ecuația (3.8)]. Pentru condițiile experimentale particulare [frecvența de eșantionare = 102,4 Hz, lungimea epocii analizate N = 2048

intervale] se obțin următoarele valori pentru jumătate din perioada unui atom  $T_{1/2}$  în octava  $j$  [ecuația (3.8)] :

| Octava $j$                 | 5    | 6    | 7    | 8    | 9   |
|----------------------------|------|------|------|------|-----|
| Semiperioada $T_{1/2}$ [s] | 0,29 | 0,59 | 1,17 | 2,35 | 4,7 |

Au fost alese octavele de la 6 la 8. Valorile numerice ale rezoluțiilor în timp și frecvență [ecuațiile (3.7) și (4.17)] pentru aceste octave sunt date în tabelul de mai jos :

| Octava $j$                             | 6    | 7    | 8    |
|----------------------------------------|------|------|------|
| Rezoluția în timp $\Delta T$ [s]       | 0,08 | 0,16 | 0,31 |
| Rezoluția în frecvență $\Delta f$ [Hz] | 0,2  | 0,1  | 0,05 |

În mod natural, timpul curent nu are importanță asupra clasificării, deși este un parametru important pentru evaluarea rezultatelor.

În final, principala provocare este reprezentată de problema alegerii limitelor parametrului amplitudine pentru atomii care trebuie considerați vârfuri în timpul somnului. În definițiile date vârfurilor din timpul somnului [capitolul 4.3], nu s-au făcut presupuneri asupra amplitudinii, ceea ce înseamnă în mod natural că fiecare structură „vizibilă” care satisface criteriul împrăstierii în timp și frecvență ar trebui considerată a fi un vârf. Aceasta translatează problema în zona amplitudinilor cu limite mai mici [sau mai degrabă în zona cu raportul local semnal/zgomot mai mic], care face structura să poată fi distinsă din fond (background), fără limite superioare. În tentativele anterioare de detectare automată a vârfurilor [Fish și colectivul 1988, Broughton și colectivul 1978, Campbell și colectivul 1980], a fost fixat un prag arbitrar, uzual între 5 și 25  $\mu V$ , pentru a reduce detecțiile false datorate zgomotului de fond.

Noțiunea de „vizibilitate” în termenii metodei MP înseamnă că structura a fost detectată – adică formele de undă optime au fost determinate în procedura iterativă înainte de aplicarea criteriului de oprire a algoritmului [paragraful 3.5]. Amplitudinea a fost lăsată ca un parametru liber pentru

investigarea modului de detecție vizuală și automate. Problema amplitudinilor mici ale vârfurilor va fi discutată mai târziu în paragraful 4.3.4.5.

Amplitudinea corespunde **modulului** parametrului care descrie atomii dicționarului. Relația dintre modulul și amplitudinea funcției fereastră a unui atom din dicționarul Gabor – ecuația (3.4) – este dată de ecuația (3.5). Totuși, această formulă ne dă doar amplitudinea **funcției fereastră**. Amplitudinea efectivă vârf-la-vârf a funcției Gabor corespunzătoare poate să depindă foarte puțin de parametrii frecvență și fază, după cum s-a arătat în paragraful 3.5.

Formula (3.5) poate fi simplificată pentru atomii care pot fi considerați vârfuri din timpul somnului. Ei sunt în octavele de la 6 la 8, cu frecvența între 11 și 15 Hz, care corespunde la parametrul  $k = 220 \rightarrow 300$ . În acest caz:

$$e^{\frac{-2\theta 2^{\frac{2k}{N}} k^{\tau}}{N^{\tau}}} < 1 \quad (5.1)$$

care ne dă o formulă aproximativă pentru amplitudinea funcției fereastră

$$K_{(\gamma, \phi)} = \frac{2^{\frac{1}{l}}}{\sqrt{2^l e^{\frac{2k}{N}} \cos\left(\frac{4\pi k p}{N} 2\phi\right)}} = 2^{\frac{-2^{\tau} \tau}{\gamma}} \quad (5.2)$$

Calibrarea dispozitivelor de înregistrare [inclusiv convertorul analog-digital] dă un număr care reprezintă  $1 \mu V$  – să-l numim  $U_0$ . Amplitudinea aproximativă [în  $\mu V$ ] a funcției fereastră a unei structuri reprezentate de un atom din dicționarul Gabor este dată de:

$$U(j \text{ modul } s) = 2 - \text{modul st } \frac{2^{\frac{-2_l \gamma}{\tau}}}{U_0} \quad [\mu V] \quad (5.3)$$

Totuși, noțiunea de amplitudine a vârfului din timpul somnului dedusă din analiză vizuală, este dată mai degrabă de diferența efectivă dintre maximul și minimul observat (măsurat), decât de amplitudinea anvelopei. Mai mult, în cazul nostru analiza vizuală a fost realizată asupra datelor digitizate, după cum s-a observat pe monitorul calculatorului. Datorită acestor condiții, a fost adăugat

un factor de corecție la formula (5.3) pentru calcularea amplitudinii efective vârf-la-vârf în locul amplitudinii funcției fereastră [a se compara Figura 17 cu Figura 16] pentru a putea calcula amplitudinile structurii.

#### 4.3.2.2. Compararea detecției automate cu judecata umană

În concordanță cu criteriul de verificabilitate din paragraful 1.1., se poate verifica consistența detecției automate a vârfurilor din timpul somnului cu rezultatele analizei vizuale. În acest scop, vârfurile din timpul somnului dintr-o derivație (C3-A2) a înregistrării nocturne au fost marcate de un specialist cu experiență în electroencefalografie. A fost adăugată la programul folosit în mod obișnuit pentru evaluarea vizuală a înregistrărilor digitale EEG, o opțiune de marcare a începuturilor și sfârșiturilor structurilor.

Potrivirile și deosebirile posibile au fost numărate astfel:

- TP (adevărat pozitiv) poziția în timp a unui atom ales este între marginile unui vârf marcat de specialist;
- FN (fals negativ) nici un atom ales nu este între marginile vârfului marcat de specialist;
- FP (fals pozitiv) atomul ales este în afara marginilor oricărui vârf marcat.

Singurul parametru liber lăsat pentru a investiga comportamentul curbelor TP/FP este valoarea amplitudinii minime de la care un atom care respectă criteriul de împrăștiere în timp și frecvență [paragraful 4.3.2.] este considerat vârf din timpul somnului. Această valoare va fi sub o amplitudine de prag.

Figura 25 b) corespunde derivatei numerice a curbei de mai sus, prezentând același procentaj  $TP/(TP+FP)$  prin numărare în gama amplitudinilor de prag. Adică, în figura 25 b) o valoare  $x$  pe abscisă corespunde unei amplitudini între  $x$  și  $x+5 \mu V$ , în timp ce în figura 25 a) se numără toate evenimentele corespunzătoare amplitudinii între 0 și  $x$ . Se observă pe ambele grafice că, pentru un prag în jurul valorii de  $50 \mu V$  [vârf-la-vârf] procentajul relativ al detecțiilor adevărat pozitive față de toate detecțiile depășește 50%.

Figurile 25 c) și d) prezintă histogramele distribuțiilor detecțiilor TP și FP în funcție de amplitudinile de prag. Valorile pe histogramă sunt din  $5 \mu V$  în  $5 \mu V$ . Cazurile TP sunt distribuite în

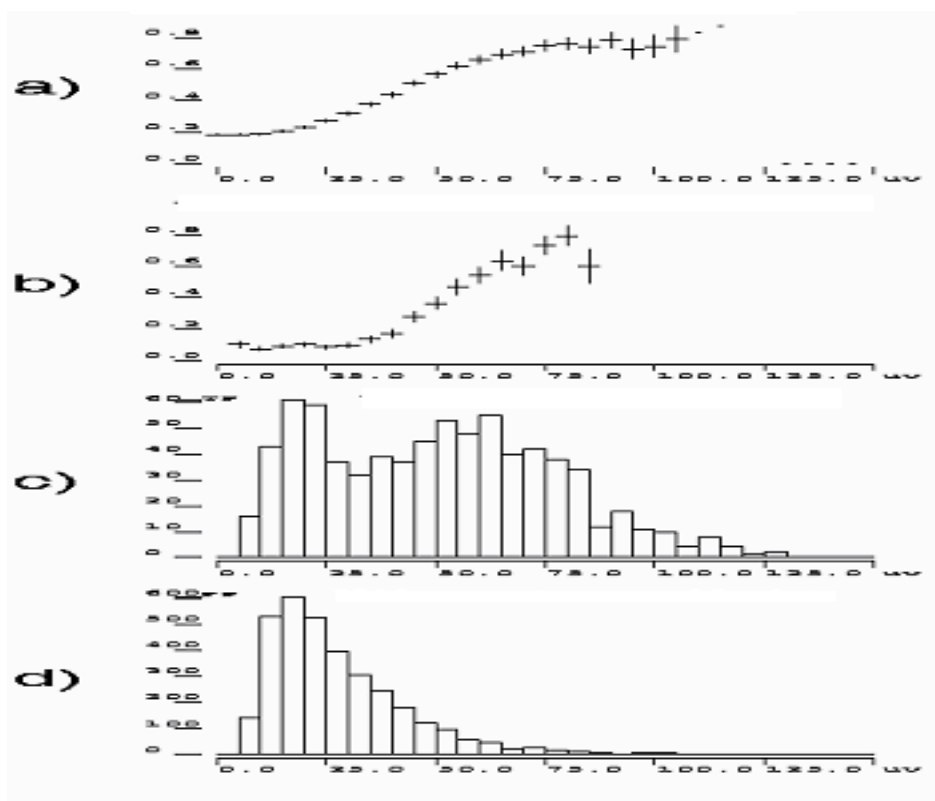
general uniform în jurul valorilor amplitudinii, descrescând numai la valori mari ale amplitudinii, deoarece vârfurile de amplitudine mare au loc arareori.

Cazurile *FP* ajung la un maxim la amplitudini mici ale pragului, din cauza posibilității scăzute de detecție vizuală a vârfurilor de mică amplitudine. Vârfurile a căror amplitudine nu depășește semnificativ amplitudinea fondului sunt practic înecate în EEG. De aceea, adesea, vârfurile de mică amplitudine nu pot fi analizate vizual. Detectarea lor precisă cu ajutorul algoritmului are loc în cazurile *FP*.

Analizarea amănunțită a evenimentelor *FN* separate a arătat că vârfurile marcate de expert și nedetectate de algoritm au intervalul de timp sau în frecvență în afara limitelor definite. De aceea, cazurile *FN* au fost uzual rezultatul detectării imprecise a vârfurilor de judecata umană. „Imprecizia” menționată anterior se referă la caracteristicile timp-frecvență ale vârfurilor din timpul somnului, definite arbitrar în termeni de game fixe de parametri, după cum s-a prezentat în paragraful 4.3.2. Acest fel de definire a structurilor EEG va fi discutat ulterior în paragraful 4.3.5.

Figura 32 prezintă exemplul altui tip de inconsistență între detectarea automată și prin judecată umană : vârfurile suprapuse. Structurile C și D au fost clasificate drept un singur vârf. Poziția în timp a centrului structurii F cade cu 7 ms în afara secțiunii marcate de expert ca fiind vârf. De aceea, structura F a fost numărată la cazurile *FP*. Subiectul vârfurilor suprapuse va fi abordat în paragraful 4.3.4.2. Figura 33 prezintă aceeași hartă timp-frecvență în trei dimensiuni, având drept coordonată verticală densitatea de energie.

Rezultatele anterioare arată o concordanță rezonabilă cu analiza vizuală pentru valori mari ale amplitudinii. S-a observat o sensibilitate mai mare a alegerii automate în cazul structurilor mai slabe. Investigarea ulterioară a acestui domeniu necesită un program mai mare, care să includă, de exemplu, compararea scorurilor mai multor electroencefalografi.



**Figura 25** Detecția automată față de detecția vizuală a vârfurilor. a)  $TP/(TP+FP)$  față de amplitudinea de prag b) în gamele de amplitudine c) și d) – histogramele detecției TP și FP față de amplitudine

## Capitolul 5

### Concluzii

Parametrizarea ortogonală cu unde amortizate are mai multe avantaje : complexitate de calcul scăzută –  $O(N)$ , implementări numerice stabile și rapide, furnizând informații despre distribuția în timp-frecvență a energiei semnalului și o interpretare directă a coeficienților de unde amortizate în termeni de conținut energetic timp-frecvență. În parametrizarea ortogonală fixă coeficienții de unde amortizate pot fi tratați ca vectori și evaluați statistic imediat. Datorită acestor caracteristici, WT poate furniza o soluție elegantă și robustă pentru o clasă largă de probleme întâlnite în analiza semnalelor biomedicale.

Limitările WT sunt legate, în principal, de faptul că baza ortonormală este predefinită. Ca rezultat, reprezentarea este sensibilă la decalajul în timp al ferestrei analizate, iar rezoluțiile sunt mici în domeniul frecvență pentru structurile cu frecvențe ridicate și în domeniul timp pentru structurile cu frecvențe scăzute. Îmbunătățirea rezoluției relative poate fi realizată prin metoda pachetelor cu unde amortizate, în care este aleasă o bază ortonormală pentru a minimiza entropia totală a reprezentării. Cu toate acestea, o asemenea alegere este afectată de tranzițiile cu energia cea mai mare. Aproximarea cu rețele neurale oferă o adaptivitate mai bună a reprezentării, însă, datorită problemelor nerezolvate a inițializării și convergenței, pare să fie în stadiul de dezvoltare prematură pentru aplicațiile de procesare generală a semnalelor.

Îmbunătățirea adaptivității reprezentării poate fi realizată prin extinderea dicționarului de funcții utilizate pentru explicarea modificării semnalului. Redundanța introdusă în acest fel necesită o metodă de alegere a unui subset de forme de undă din dicționar pentru descrierea semnalului. Criteriul de alegere poate fi, de exemplu, bazat pe minimizarea erorii de reprezentare pentru un număr dat de forme de undă. Soluția acestei probleme este polinomial greu de determinat iar o astfel de expansiune optimă nu este stabilă față de numărul de forme de undă permise. Amândouă aceste probleme lipsesc în metoda cu Căutarea Adaptării (MP), care oferă soluția sub-optimală pentru problema expansiunii semnalului peste un dicționar redundant.

MP este un algoritm care, în mod iterativ, adaptează formele de undă dintr-un dicționar redundant cu structurile locale ale semnalului. Dicționarul de funcții Gabor descrie structurile prezente

în semnal în termeni de frecvență, timp de producere, interval de timp, amplitudine și fază cu o rezoluție care poate fi ajustată – până spre limitele teoretice. Dicționarele construite din forme de undă arbitrare, nu neapărat funcții analitice, pot fi proiectate să îmbunătățească detectabilitatea structurilor cu o morfologie particulară. Totuși, aplicarea în practică a algoritmului MP, chiar pentru dicționare construite din funcții analitice, necesită optimizare euristică pentru a mări viteza de calcul. Acest fapt trebuie luat în considerare când se compară rezultatele obținute cu ajutorul altor implementări, chiar dacă s-a folosit același dicționar.

Cu toate acestea, se poate spune că MP realizează cea mai completă și precisă descriere a structurilor timp-frecvență dintre metodele disponibile. Această aproximare oferă noi posibilități de urmărire a tranzițiilor EEG. Descompunerea MP în serii de timp poate realiza, de asemenea, o parametrizare completă a EEG, îmbunătățind posibilitățile oferite de metodele aplicate anterior.

## BIBLIOGRAFIE

- [Ami96] M. G. AMIN. Recursive Kernels for Time-Frequency Signal Representation. *IEEE Signal Processing Letter*, 1996, pg. 16-18.
- [Aug91] F. AUGER. Representation Temps-Frequence des Signaux Non-Stationnaires. *Synthese et Contribution*. 1991, pg. 221.
- [Aug91] F. AUGER. Representation Temps-Frequence des Signaux Non-Stationnaires. *Synthese et Contribution*. 1991, pg. 221.
- [Coh95] L. COHEN. Time-Frequency Analysis. *Englewood Cliffs, Prentice Hall*, 1995.
- [Cun92] G. CUNNINGHAM. Fast Computation of the Wigner Distribution for Finite Length Signal. *IEEE International Conference Signal Processing*, 1992, pg. 177-180.
- [Dev96] L. DEVROYE, G. LUGOSI. A Probabilistic Theory of Pattern Recognition. *New York, Verlage*, 1996.
- [Don95] R. N. DONOUGH, A. WHALEN. Detection of Signals in Noise. *London, Academic Press*, 1995.

- [Dum01] C. DUMITRESCU. Analiza EEG utilizând metoda Matching Pursuit și funcția Gabor. *A XXIX Sesiune de comunicări tehnico-științifice a Institutului pentru Tehnologii Avansate*, București 2001.
- [Dum02] C. DUMITRESCU. Dezvoltarea și implementarea algoritmului DTDF pentru analiza de semnal utilizând reprezentarea în planul timp-frecvență. *A XXX Sesiune de comunicări tehnico-științifice a Institutului pentru Tehnologii Avansate*, București 2002.
- [Dum02a] C. DUMITRESCU. Analiza semnalelor cu ajutorul algoritmului Matching Pursuit și reprezentarea Wigner-Ville. *Raport de activitate, vol. 1, nr. 2, pg.205-220*, 2002.
- [Fla93] P. FLANDRIN. Temps-Frequence. *Paris, Hermes*, 1993.
- [Fuk92] K. FUKUNAGA. Introduction to Statistical Pattern Recognition. *Academic Press*, 1990.
- [Gon98] P. GONCALVEZ, E. PAYOT. Adaptive Equation for Time-Frequency Representation. *Bryce Canyon, Utah, USA*, 1998.
- [Loo35] A. LOOMIS, E. HARVEY. Potentials Rhythms of the Cerebral Cortex during Sleep. *Science*, 1935, pg. 597-598.
- [Lwh92] J. LU, J. WEAVER, D. HEALY. Noise Reduction with Multiscale Edge Representation and Perceptual Criteria, *Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and TimeScale Analysis, Victoria, B.C., pp. 555—558*, 1992.
- [Mar95] W. MARTIN, P. FLANDRIN. Wigner-Ville Spectral Analysis of Nonstationary Processes. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1985, vol. 33, pg. 1464-1469.
- [Mal 63] S. MALLAT, Z. ZHANG. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 12(41), pp. 3397-3415, 1993.
- [Ric97c] C. RICHARD, R. LENGELLE. Joint Time and Time-Frequency Optimal Detection. *IEEE International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, 1997.
- [Ric98a] C. RICHARD, R. LENGELLE. Structural Risk Minimization for Reduced-Bias Time-Frequency-Based Detectors Design. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1998, pg. 2397-2400.
- [Sch91] L. SCHARF. Statistical Signal Processing. *USA, Addison-Wesley*, 1991.

- [Skl79] J. SKLANSKY, G. WASSEL. Pattern Classifiers and Trainable Machine. *New-York, Springer-Verlag*, 1979.
- [Vap82] V. VAPNIK. Estimation of Dependences Based on Empirical Data. *New-York, Springer-Verlag*, 1982.
- [Vas91] V. VASEGHI. Advanced Signal Processing. *Wiley* 1998.
- [Vil48] J. VILLE. Theorie et Application de la Notion de Signal Analytique. *Cables et Transmissions*, 1948, pg. 61-74.
- [Was72] G. WASSEL, J. SKLANSKY. Training a one-dimensional Classifier to Minimize the Probability of Error. *Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1972, pg. 533-541.
- [Wid88] B. WIDROW, M. HOFF. Adaptive Switching Circuits. *Neurocomputing Foundations of Research. Cambridge, MIT Press*, 1988.
- [Wig32] E. WIGNER. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Physical Review*, 1932, vol. 40, pg. 749-759.
- [W91] M. WICKERHAUSER. Lectures on Wavelet Packet Algorithms, *INRIA, Roquencourt, France, Minicourse lecture notes*, 1991
- [Wb98] D. WEI, A. BOVIK. Enhancement of Compressed Images by Optimal Shift-Invariant Wavelet Packet Basis, *J. Visual Commun. Image Represen., Special Issue on High-Fidelity Media Processing*, vol. 9, no. 1, pp. 15-24, Mar. 1998.
- [Woog96] L.J. WOOG. Adapted Waveforms Algorithms for Denoising, Teză de doctorat, *Yale University*, 1996.
- [Zie91] T. ZIELINSKI. Note on Computation of some Bilinear Time-Frequency Signal Representation. *International Conference on Digital Signal Processing*, 1991, pg. 40-44.